Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 30. Oktober 2009
http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ws09_10/wpfv/statii/

Prof. Dr. Harald Engel
Dipl. Phys. Valentin Flunkert

2. Übungsblatt zur Nichtlineare Dynamik und Strukturbildung

Abgabe: Dienstag 10.11. in der Übung. Die Abgabe erfolgt in **2er oder 3er Gruppen**. Bitte Namen und Matrikelnummern angeben. Es werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte.

Aufgabe 3 (10 Punkte): *Lyapunov-Funktion*

1. Betrachten Sie die Lotka-Volterra-Gleichungen

$$\begin{aligned}\dot{N} &= N(a - b\,P) \qquad (a,\, b,\, c,\, d > 0)\\ \dot{P} &= P(c\,N - d).\end{aligned}$$

   Das System hat offensichtlich einen trivialen Fixpunkt $(N,\, P) = (0,\, 0)$ und einen "inneren" Fixpunkt $(N,\, P) = (\frac{d}{c},\, \frac{a}{b})$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$V(N,\, P) := c\,N - d\ln N + b\,P - a\ln P$$

   eine Erhaltungsgrösse ist und am inneren Fixpunkt ein Minimum hat.
   Damit ist auch gezeigt, dass V eine Lyapunov Funktion ist. Warum?
   Welche Stabilitätsaussagen können Sie damit über den inneren Fixpunkt treffen?

2. Zeigen Sie, dass für die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u(x,\, t) = D\,\partial_x^2 u(x,\, t) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

   das Integral

$$I = \int_{\mathbb{R}} dx\,(\partial_x u)^2$$

   eine Lyapunov-Funktion (Lyapunov-Funktional) für homogene Zuände $u(x,\, t) = \mathrm{const}$ ist.

Aufgabe 4 (10 Punkte): *Relaxationsschwingungen*
Die Gleichung für den Rayleigh-Oszillator ist gegeben durch

$$\ddot{v} + \alpha f(\dot{v}) + v = 0, \qquad \text{mit} \qquad f(\dot{v}) = \frac{1}{3}(\dot{v})^3 - \dot{v}\ .$$

Wir wollen das dynamische Verhalten für $\alpha \gg 1$ untersuchen.

1. Schreiben Sie die Gleichung als System von Gleichungen in den Variablen

$$z := v/\alpha, \qquad x := \alpha\dot{z}\ .$$

2. Diskutieren Sie die Dynamik in der $(z,\, x)$-Ebene. Orientieren Sie sich dabei an der Kurve $z = -f(x)$.

3. Schätzen Sie die Periodenlänge der Oszillation (Relaxationsschwingung) ab, indem Sie die Zeit über die relevanten (langsamen) Teile der Trajektorie integrieren.