Prof. Dr. Harald Engel
Dipl. Phys. Valentin Flunkert

3. Übungsblatt zur Nichtlineare Dynamik und Strukturbildung

Abgabe: Dienstag 17.11. in der Übung. Die Abgabe erfolgt in **2er oder 3er Gruppen**. Bitte Namen und Matrikelnummern angeben. Es werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte.

Aufgabe 3 (10 Punkte): *Floquet-Theorie*
Das dynamische System

$$\dot{z} = (\lambda + i - |z|^2)z \qquad (z \in \mathbb{C},\ \lambda > 0)$$

besitzt einen kreisförmigen periodischen Orbit.

1. Zerlegen Sie die Gleichungen in Radius $r(t)$ und Winkel $\phi(t)$ (mit $z = r\,e^{i\phi}$) und finden Sie r und $\phi(t)$ für den periodischen Orbit. Wie lautet die Periode T des Orbits? Leiten Sie die Variationsgleichung um den Orbit her und bestimmen Sie die Floquet-Multiplikatoren.

2. Beschreiben Sie das System nun in kartesische Koordinaten x, y (mit $z = x + iy$) und bestimmen Sie $A(t)$ in der Variationsgleichung

   $$\dot{u}(t) = A(t)\,u(t)$$

   wobei $u(t)$ die Störung ist.

3. Bestimmen Sie nun die Floquet-Multiplikatoren numerisch mit Mathematica (oder einem anderen Programm) für $\lambda = 1$, indem Sie die matrixwertige Variationsgleichung

   $$\dot{U}(t) = A(t)\,U(t) \qquad \text{mit} \qquad U(0) = \mathbb{1}$$

   über eine Periode integrieren und die Eigenwerte von $U(T)$ (der Monodromy-Matrix) bestimmen.

Aufgabe 4 (10 Punkte): *Lorenz-System*
Die Gleichungen für das Lorenz-System sind gegeben durch

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -\sigma u + \sigma v\\ \dot{v} &= -v + r\,u - u\,w\\ \dot{w} &= -b\,w + u\,v\end{aligned}$$

mit b, σ, $r > 0$.

1. Bestimmen Sie die Fixpunkte des Lorenz-Systems.

2. Führen Sie die lineare Stabilitätsanalyse der Fixpunkte in Abhängigkeit vom Parameter r durch.

3. Zeigen Sie, dass der seltsame Attraktor im Phasenraum begrenzt ist.
   Betrachten Sie dazu den Abstand

   $$A := u^2 + v^2 + (w - r - \sigma)^2$$

   vom Punkt $(0,\, 0,\, r + \sigma)$ und zeigen Sie, dass gilt:

   $$\frac{d}{dt}A = -\sigma u^2 - v^2 - b\left(w - \frac{r+\sigma}{2}\right)^2 + b\left(\frac{r+\sigma}{2}\right)^2.$$

   Wie gross muss A sein, damit für alle Anfangsbedingungen mit diesem A gilt $\frac{d}{dt}A < 0$?