

Prof. Dr. Harald Engel
Dipl. Phys. Valentin Flunkert

4. Übungsblatt zur Nichtlinearen Dynamik und Strukturbildung

Abgabe: Dienstag 24.11. in der Übung. Die Abgabe erfolgt in **2er oder 3er Gruppen**. Bitte Namen und Matrikelnummern angeben. Es werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte.

Aufgabe 7 (6 Punkte): Poincare-Index

Betrachten Sie ein zweidimensionales dynamisches System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y).\end{aligned}$$

Der Poincare-Index eines Pfades Γ im Phasenraum ist definiert durch

$$I_p(\Gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{f dg - g df}{f^2 + g^2}$$

und misst wie oft sich der Vektor (f, g) dreht, wenn man Γ einmal umrundet. Es gilt:

Der Poincare-Index ändert sich nicht, wenn der Pfad Γ oder das Vektorfeld (f, g) kontinuierlich transformiert werden, solange keine kritischen Punkte die Kurve Γ passieren.

Wenn Γ einen einzelnen isolierten Fixpunkt umrandet, dann nennt man $I_p(\Gamma)$ den Index des Fixpunktes. Zeigen Sie die folgenden Aussagen

1. Der Index eines Knoten oder Zentrums ist $+1$.
2. Der Index eines Sattels ist -1 .
3. $I_p(\Gamma)$ ist gleich der Summe der Indices aller Fixpunkte in Γ .
4. Wenn Γ auf einem periodischen Orbit des Systems liegt, dann ist der Index $+1$. Daraus folgt, dass es mindestens einen Fixpunkt innerhalb von Γ geben muss.

Aufgabe 8 (7 Punkte): Schwalbenschwanz-Bifurkation (nach R. Thom)

Die Potentialfunktion

$$V(x; \boldsymbol{\mu}) = \frac{x^5}{5} + \mu_1 \frac{x^3}{3} + \mu_2 \frac{x^2}{2} + \mu_3 x$$

ist die universelle Entfaltung der entarteten Singularität $x = 0$ von $V(x; 0, 0, 0) = \frac{x^5}{5}$.

1. Zeichnen Sie die ebenen Schnitte durch die dreidimensionale Bifurkationsmenge bei konstanten Werten $\mu_1 < 0$, $\mu_1 = 0$ und $\mu_1 > 0$ und tragen Sie die Konfiguration der Fixpunkte des dynamischen Systems

$$\frac{d}{dt}x = -\text{grad } V(x; \boldsymbol{\mu})$$

in den einzelnen Bereichen der (μ_2, μ_3) -Ebene ein.

2. Überzeugen Sie sich, dass die parametrische Darstellung der Menge aller \bullet_C -Punkte durch

$$\mu_1 = -6a^2, \quad \mu_2 = -8a^3, \quad \mu_3 = -3a^4$$

gegeben ist.

4. Übung WS09/10

Aufgabe 9 (7 Punkte): Lasermodell

Ein einfaches Lasermodell ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\dot{n} &= G n N - k n \\ \dot{N} &= -G n N - f N + I,\end{aligned}$$

hierbei ist

$N(t)$ - Anzahl angeregter Atome im Lasermedium, $n(t)$ - Anzahl von Photonen im Resonator,
 G - Gewinnrate (stimulierte Emission), k - Photonenverlustrate des Resonators,
 f - Zerfallsrate (spontane Emission), I - Pumprate.

1. Zeigen Sie, dass die Gleichungen durch die Transformation

$$s = kt, \quad x(s) = x(kt) := \frac{G}{f}n(t), \quad y(s) = y(kt) := \frac{G}{k}N(t) - 1$$

in die dimensionslose Form

$$\begin{aligned}x'(s) &= y x \\ y'(s) &= \varepsilon [p - y - (1 + y)x]\end{aligned}$$

gebracht werden können, wobei $\varepsilon = f/k$ und $p = GI/(fk) - 1$ ist. Hierbei ist x die reskalierte Photonendichte und y die reskalierte Anzahl von angeregten Atomen.

2. Finden Sie die beiden Fixpunkte die zu "Laser aus" und "Laser an" gehören und klassifizieren Sie diese (stabil/instabil, Sattel/Knoten/Fokus) in Abhängigkeit von ε und p .
3. Skizzieren Sie die Stabilitätsgrenzen der Fixpunkte in der (p, ε) -Parameterebene. Skizzieren Sie ausserdem den Bereich indem der "Laser an"-Fixpunkt ein Fokus ist.

Prof. Dr. Harald Engel
Dipl. Phys. Valentin Flunkert

Zusatzmaterial zur VL

Universelle Entfaltungen für $k \leq 4$

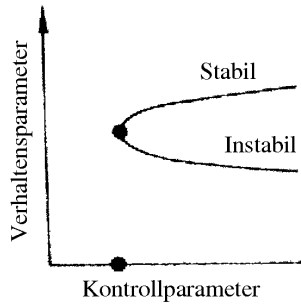
k	n	singularity	universal unfolding	name
1	1	$x^3/3$	$x^3/3 + \mu_1 x$	fold (saddle-node)
2	1	$x^4/4$	$x^4/4 + \mu_1 x^2/2 + \mu_2 x$	cusplike
3	1	$x^5/5$	$x^5/5 + \mu_1 x^3/3 + \mu_2 x^2/2 + \mu_3 x$	swallowtail
3	2	$x^3/3 + y^3/3$	$x^3/3 + y^3/3 + \mu_1 xy - \mu_2 x - \mu_3 y$	hyperbolic umbilic
3	2	$x^3/3 - xy^2$	$x^3/3 - xy^2 + \mu_1 (x^2 + y^2) - \mu_2 x - \mu_3 y$	elliptic umbilic
4	1	$x^6/6$	$x^6/6 + \mu_1 x^4/4 + \mu_2 x^3/3 + \mu_3 x^2/2 + \mu_4 x$	butterfly
4	2	$x^2y + y^4/4$	$x^2y + y^4/4 + \mu_1 x^2 + \mu_2 y^2 - \mu_3 x - \mu_4 y$	parabolic umbilic

Weiterführende Literatur

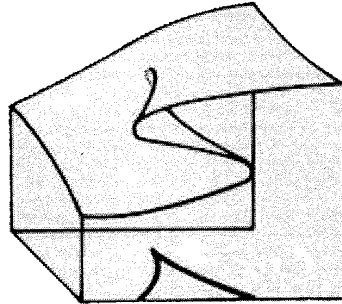
- [1] R. Thom, Structural stability and morphogenesis, Addison Wesley, 1989.
- [2] J. Thompson, Instabilities and catastrophes in science and engineering, Wiley, 1982.
- [3] E. C. Zeeman, Vortrag am Trinity College, San Antonio, March 1995.
- [4] T. Poston, I. Stewart, Catastrophe theory and its applications, Pitman, London, 1978 (Kapitel 9: The first seven catastrophe geometries).
- [5] Th. Bröker, L. Lander, Differentiable germs and catastrophes, Cambridge University Press, 1975. Kap. 17
- [6] <http://zakuski.utsa.edu/~gokhman/ecz/c.html>, Populäre Einführung von E. C. Zeeman, Trinity University San Antonio, March 1995

4. Übung WS09/10

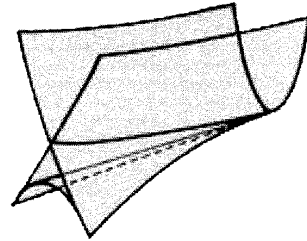
Spitze



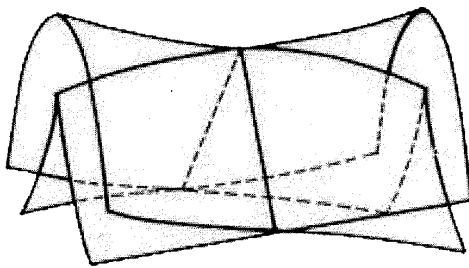
Faltung



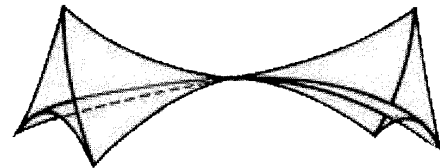
Schwalbenschwanz



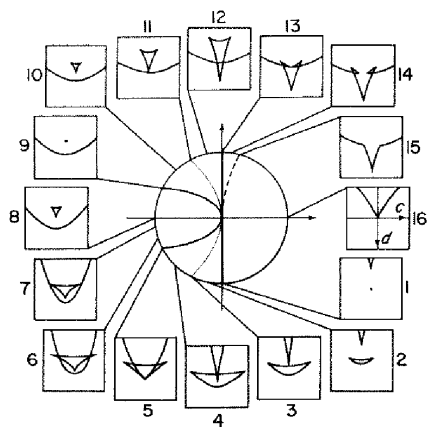
Hyperbolischer Sattel



Elliptischer Sattel



Schmetterling $k=4$



Parabolischer Sattel

