

Prof. Dr. Harald Engel  
Dipl. Phys. Valentin Flunkert

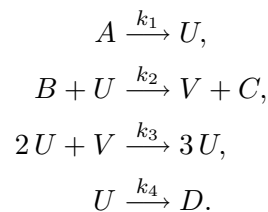
## 5. Übungsblatt zur Nichtlinearen Dynamik und Strukturbildung

**Abgabe:** Dienstag 1.12. in der Übung. Die Abgabe erfolgt in **2er oder 3er Gruppen**.

**Hinweis:** Ab sofort findet die Übung im EW733 statt.

### Aufgabe 10 (20 Punkte): Turing-Strukturen

Die Reaktionen des Brüsselator-Modells<sup>1</sup> (siehe VL) sind gegeben durch



Die zugehörigen Dichten seien  $u, v, b, c, d$ .

1. Stellen Sie die Reaktions-Diffusions-Gleichungen für die Dichten der Zwischenprodukte  $U, V$  auf und zeigen Sie, dass sich für  $k_i = 1$  (lässt sich durch geeignete Skalierung der Variablen erreichen) die folgenden Gleichungen ergeben

$$\begin{aligned}\dot{u} &= a - (b + 1)u + u^2 v + D_u \nabla^2 u, \\ \dot{v} &= bu - u^2 v + D_v \nabla^2 v.\end{aligned}$$

Setzen Sie im folgenden  $a$  konstant und fassen Sie  $b$  als Bifurkationsparameter auf.

2. Diskutieren Sie die Dynamik des Reaktionsteils in der  $(u, v)$ -Phasenebene: Bestimmen Sie den/die Fixpunkte und deren Stabilität in Abhängigkeit von  $b$  und den Wert  $b_h$  bei dem eine Hopf-Bifurkation auftritt. Zeichnen Sie die Nullklinen und den Phasenfluss (von Hand oder mit Mathematica) für  $a = 1, b < b_h$  und für  $a = 1, b > b_h$ .
3. Die diffusionsgetriebene Turing-Instabilität tritt dann auf, wenn der gegen räumlich homogene Störungen stabile HSS durch räumlich inhomogene Störungen einer bestimmten Wellenzahl  $k$  destabilisiert wird.

Betrachten Sie den eindimensionalen Fall und bestimmen Sie die Instabilitätskurve  $b(k)$  aus der Bedingung, dass ein reeller Eigenwert  $\lambda$  der charakteristischen Gleichung durch Null läuft. Zeigen Sie, dass das Minimum dieser Kurve durch

$$b_{cr} = \left[ 1 + a \sqrt{\frac{D_u}{D_v}} \right]^2, \quad k_{cr}^2 = \frac{a}{\sqrt{D_u D_v}}$$

gegeben ist.

4. Zeichnen Sie die Hopf- und die Turing-Bifurkationslinien in der  $(a, b)$ -Parameterebene ein. Für welche Parameter ereignet sich die Hopf-Bifurkation vor der Turing-Bifurkation? Unter welchen Bedingungen fallen beide Bifurkationen in einer Kodimension-2 Turing-Hopf-Bifurkation zusammen? *Hinweis: Im unendlich ausgedehnten System kann man die Abweichungen vom HSS zu  $\exp(ikr + \lambda(k)t)$  setzen und die Randbedingungen umgehen.*

<sup>1</sup>I. Prigogine, G. Nicolis, *On Symmetry-Breaking Instabilities in Dissipative Systems*, Journal of Chemical Physics, **46**, p. 3542 (1967)

I. Prigogine and R. Lefever, *Symmetry Breaking Instabilities in Dissipative Systems II*, Journal of Chemical Physics, **48**, pp. 1695–1700 (1968)