Prof. Dr. Harald Engel
Dipl. Phys. Valentin Flunkert

6. Übungsblatt zur Nichtlinearen Dynamik und Strukturbildung

Abgabe: Dienstag 8.12. in der Übung. Die Abgabe erfolgt in **2er oder 3er Gruppen**.

Aufgabe 11 (10 Punkte): *Stückweise lineare Kinetik*
Betrachten Sie das folgende Reaktions-Diffusion-System

$$\partial_t u = \partial_x^2 u + f(u)$$
mit
$$f(u) = -u + (u_3 - u_1)\, H(u - u_2) + u_1,$$

wobei H die Heaviside-Funktion ist.

1. Transformieren Sie die Gleichung in ein mitbewegtes Bezugssystem $\xi = x - ct$ um laufende Wellenlösungen zu bestimmen.
2. Machen Sie für die Teilbereiche $\xi < 0$ und $\xi > 0$ jeweils einen Lösungsansatz, der die Randbedingungen $\lim_{\xi\to\infty} u = u_1$ und $\lim_{\xi\to-\infty} u = u_3$ erfüllt.
3. Setzen Sie die Lösungen stetig zusammen und bestimmen Sie die Geschwindigkeit c der Welle aus der Stetigkeitsbedingung. Plotten Sie (Mathematica o. ä.) c als Funktion von u_2 für feste u_1 und u_3.

Aufgabe 12 (10 Punkte): *Reaktionsfronten im Schlögl-Modell*
Betrachten Sie ein Reaktionsdiffusionssystem mit bistabiler Kinetik entsprechend

$$\partial_t u = D\, \partial_x^2 u + f(u)$$
mit
$$f(u) = -k(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3),$$

wobei $u_1 < u_2 < u_3$ und $k, D > 0$.

1. Beweisen Sie unter Verwendung des Lösungsansatzes aus der Vorlesung die Ergebnisse für das Frontprofil
$$u(\zeta) = \frac{u_1 + u_3}{2} + \frac{u_1 - u_3}{2} \tanh\left(\sqrt{\frac{k}{2D}}\frac{u_1 - u_3}{2}\zeta\right)$$
mit $\zeta = x - ct$ und der Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Reaktionsfront
$$c = \sqrt{\frac{kD}{2}}\,(u_1 + u_3 - 2u_2)$$
für den Übergang von u_1 nach u_3 ($\lim_{\xi\to\infty} u = u_3$, $\lim_{\xi\to-\infty} u = u_1$).
Hinweis: Prüfen Sie, ob das Frontprofil die Differentialgleichung und die Randbedingungen erfüllt.
2. Verifizieren Sie auch den Ausdruck für die Frontbreite
$$L = 4\sqrt{\frac{2D}{k}}\,(u_3 - u_1)^{-1}$$
und plotten (Mathematica o. ä.) Sie die Frontlösung in der $\left(u, \frac{du}{d\zeta}\right)$-Phasenebene.