Prof. Dr. Harald Engel
Dipl. Phys. Valentin Flunkert

# 7. Übungsblatt zur Nichtlinearen Dynamik und Strukturbildung

**Abgabe:** Dienstag 2.2. in der Übung. Die Abgabe erfolgt in **2er oder 3er Gruppen**.

**Aufgabe 13 (10 Punkte):** *Langevin-Gleichung*
Betrachten Sie die lineare Langevin-Gleichung

$$\frac{d}{dt}\underline{x} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{\xi}(t), \qquad \underline{\underline{A}} \text{ negativ definit}$$

mit

$$\langle \underline{\xi}(t)\,\underline{\xi}(t')^T \rangle = \underline{\underline{D}}\delta(t-t'), \qquad \langle \underline{\xi}(t) \rangle = 0.$$

1. Finden Sie eine formale Lösung für die Langevin-Gleichung indem Sie die Greenfunktion der Gleichung $\frac{d}{dt}\underline{x} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}$ verwenden.
2. Zeigen Sie damit, dass wenn $[\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{D}}] = 0$ die Autokorrelationsfunktion $\underline{\underline{R}}(s) = \lim_{t\to\infty} \langle \underline{x}(t+s)\,\underline{x}(t)^T \rangle$ gegeben ist durch

   $$\underline{\underline{R}}(s) = \exp(\underline{\underline{A}}s)\,\underline{\underline{D}}\,(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}^T)^{-1}.$$

   Begründen Sie die Schritte in Ihrer Rechnung.
3. Betrachten Sie nun als Spezialfall einen Fokus

   $$\dot{x} = -\lambda x + \omega y + \xi_1(t), \qquad \langle \xi_i(t)\,\xi_j(t') \rangle = d\,\delta_{ij}\delta(t-t')$$
   $$\dot{y} = -\omega x - \lambda y + \xi_2(t)$$

   und Berechnen Sie $\underline{\underline{R}}(s)$ für diesen Fall explizit. Plotten Sie die Einträge von $\underline{\underline{R}}(s)$ als Funktion von $s$ für verschiedene Werte der Parameter.

**Aufgabe 14 (10 Punkte):** *numerische Lösung stochastischer DGL, mittlere Übergangszeit*

Betrachten Sie die überdämpfte Bewegung eines Teilchens in einem eindimensionalen Potential $U(x)$ unter dem Einfluss von stochastischen Stößen

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\frac{1}{\alpha}\partial_x U(x(t)) + \zeta(t), \qquad \langle \zeta(t)\,\zeta(t') \rangle = D\delta(t-t'), \quad \langle \zeta(t) \rangle = 0.$$

Eine solche Langevin-Gleichung kann numerisch mit dem Euler Verfahren gelöst werden:

$$x(t+\Delta t) = x(t) - \frac{1}{\alpha}\partial_x U(x(t))\,\Delta t + \sqrt{D\Delta t}\,\xi(t). \tag{1}$$

wobei $\xi(t)$ eine normalverteilte Zufallszahl ist.

1. Schreiben Sie ein Programm um die Gleichung (1) für den Fall $U(x) = (3x - x^3)/2$ zu simulieren. Dieses Potential hat ein Minimum bei $x = -1$ und eine Potentialbarriere der Höhe 2 bei $x = +1$.
2. Berechnen Sie die mittlere Zeit, die ein Teilchen, das im Potentialminimum $x = -1$ startet, braucht um die Barriere zu überwinden. Um diese Übergangszeit (escape time) $T$ zu berechnen müssen Sie über einige tausend Realisierungen mitteln. Plotten Sie $T$ als Funktion der Rauschintensität $D$.