Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. A. Knorr
Dr. Carsten Weber
Dipl.-Phys. Alexander Carmele
Dipl.-Phys. Frank Milde

12. November 2009

http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ws09_10/pvbs/edynamik/

5. Übungsblatt zur Theoretischen Physik III: Elektrodynamik

Abgabe: bis Mittwoch 25.11.2009 12:15 Uhr in der Vorlesung.

Aufgabe 12 (6 Punkte): *Retardierte Potentiale*
Gegeben sei die infinitesimale Stromverteilung $\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \omega \mathbf{d}_0 \sin(\omega t)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$.

1. Leiten Sie mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung einen Ausdruck für die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r},t)$ her. Nehmen Sie als Anfangsbedingung $\rho(\mathbf{r},t=0)=0$ an. Worum handelt es sich bei dieser Ladungsdichte physikalisch?
2. Berechnen Sie das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$.
3. Berechnen Sie das skalare Potential $\Phi(\mathbf{r},t)$.

Aufgabe 13 (14 Punkte): *Multipolentwicklung*

1. In der VL wurde das Dipolpotential mit
$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{e}_r}{r^2}$$
bestimmt. Leiten Sie das daraus resultierende E-Feld in Kugel- als auch in kartesischen Koordinaten her.
2. Leiten Sie die Multipolentwicklung in kartesischen Koordinaten her. Entwickeln Sie dazu das elektrostatische Potential
$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$
in eine Taylorreihe bis zur 2. Ordnung (entsprechend dem Quadrupolmoment). Bringen Sie die Entwicklung in die Form
$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r} + \frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{2}\frac{\mathbf{r}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}}{r^5}\right)$$
indem Sie das Quadrupolmoment $\mathbf{Q}$ so definieren, daß es spurfrei ist ($\sum_i Q_{ii} = 0$). Wie sind die Gesamtladung q und das Dipolmoment $\mathbf{d}$ hier definiert?
3. Zeigen sie durch Rechnung, wann das Quadrupolmoment unabhängig von der Wahl des Ursprungs ist.
4. Betrachten Sie folgende mikroskopische Ladungsverteilung
$$\rho(\mathbf{r}) = q_1\delta(\mathbf{r}-\mathbf{e}_x - a\mathbf{e}_y) + q_1\delta(\mathbf{r}+\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y) + q_2\delta(\mathbf{r}+\mathbf{e}_x - b\mathbf{e}_y) + q_2\delta(\mathbf{r}-\mathbf{e}_x + a\mathbf{e}_y)$$
mit Ladungen $q_1 > 0$ und $q_2 < 0$. Zeichnen Sie die Ladungsverteilung und berechnen Sie das Potential in Multipolentwicklung bis zum Quadrupolmoment. Unter welchen Umständen dominieren jeweils Monopol-, Dipol- oder Quadrupolterm dieser Ladungsverteilung? Wie vereinfacht sich der Quadrupoltensor für letzteren Fall?