Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. A. Knorr
Dr. Carsten Weber
Dipl.-Phys. Alexander Carmele
Dipl.-Phys. Frank Milde

30. Oktober 2009
http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ws09_10/pvbs/edynamik/

4. Übungsblatt zur Theoretischen Physik III: Elektrodynamik

Abgabe: bis Mittwoch 18.11.2009 12:15 Uhr in der Vorlesung.

Aufgabe 9 (14 Punkte): *Liénard-Wiechert-Potentiale*
In dieser Aufgabe betrachten wir die Potentiale von bewegten Ladungen, die sogenannten Liénard-Wiechert-Potentiale.

1. In der Vorlesung wurde, ausgehend von der allgemeinen retardierten Form

$$\phi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}t' \int \mathrm{d}^3r' \, \frac{\rho(\mathbf{r}',t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\delta(t-t'-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}),$$

das skalare Potential einer bewegten Punktladung q mit der Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r},t) = q\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t))$ hergeleitet. Zeigen Sie analog für das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$, dass das entsprechende Result für die Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = q\dot{\mathbf{r}}_0(t)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t))$ durch

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{q\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\mathbf{r}}_0(t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')| - (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t'))\cdot\frac{\dot{\mathbf{r}}_0(t')}{c}}\Bigg|_{t'=\bar{t}}$$

gegeben ist, wobei $\bar{t}(\mathbf{r},t)$ die Lösung der Gleichung $f(t') = t - t' - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')|}{c} = 0$ ist. Warum hat $f(t') = 0$ nur eine Lösung? (Hinweis: Beachten Sie, dass $|\dot{\mathbf{r}}_0(t)| < c$.)

2. Behandeln Sie analog zur Vorlesung den Spezialfall der Liénard-Wiechert-Potentiale für eine Punktladung q, die sich mit konstanter Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}_0 = v\mathbf{e}_z$ auf der z-Achse bewegt. Zeigen Sie, dass diese durch

$$\phi(\mathbf{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\tilde{R}} \text{ und } \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{q\mu_0}{4\pi}\frac{v}{\tilde{R}}\mathbf{e}_z$$

gegeben sind, mit $\tilde{R} = \sqrt{(1-\beta^2)(x^2+y^2)+(z-vt)^2}$ und $\beta = \frac{v}{c}$. Zur Zeit $t=0$ sei die Ladung im Ursprung. Was passiert für $v \to c$?

3. Zeigen Sie, dass die zu den allgemeinen Liénard-Wiechert-Potentialen aus Teil 1 gehörenden Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ durch

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\mathbf{e}_R-\boldsymbol{\beta}}{R^2\gamma^2(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{e}_R)^3} + \frac{\mathbf{e}_R\times\left[(\mathbf{e}_R-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right]}{cR(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{e}_R)^3}\right)\Bigg|_{t'=\bar{t}}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\mathbf{e}_R(\bar{t})\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \tag{1}$$

gegeben sind, wobei $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, $\boldsymbol{\beta} = \frac{\dot{\mathbf{r}}_0}{c}$ und $\mathbf{e}_R = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|}$ mit $\mathbf{R}(t) = \mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t)$.

Bitte Rückseite beachten!⟶

Aufgabe 10 (4 Punkte): *Strahlungsfeld*
Der zweite Term des elektrischen Feldes in Gl. (1) beschreibt beschleunigte Ladungen und erzeugt somit ein Strahlungsfeld. Die abgestrahlte Leistung des Teilchens in Richtung $\mathbf{e}_R(\bar{t})$ pro Raumwinkel $d\Omega$ und Zeitintervall $d\bar{t}$ ist gegeben durch

$$\frac{dP}{d\Omega} = R^2 \mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_R \left(\frac{dt}{dt'} \right) \Bigg|_{t'=\bar{t}} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{\left\{ \mathbf{e}_R \times \left[(\mathbf{e}_R - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}} \right] \right\}^2}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{e}_R)^5} \Bigg|_{t'=\bar{t}} .$$

Mit der Annahme, dass das Teilchen in Bewegungsrichtung beschleunigt oder abgebremst wird, folgt

$$\frac{dP}{d\Omega} \approx \frac{\mu_0 q^2 \ddot{\mathbf{r}}_0^2(\bar{t})}{16\pi^2 c} \frac{\sin^2\theta}{(1 - \beta(\bar{t}) \cos\theta)^5},$$

wobei θ der Winkel zwischen der Beschleunigung $\ddot{\mathbf{r}}_0(\bar{t})$ und der Ausstrahlungsrichtung $\mathbf{e}_R(\bar{t})$ ist. Schauen Sie sich mit Hilfe eines Plot-Programms (Mathematica, Maple, usw.) die Strahlungscharakteristik, d.h. die Abhängigkeit von $dP/d\Omega$ von θ, für verschiedene Geschwindigkeiten β an und interpretieren Sie die Ergebnisse. Was passiert für $v \to c$? Nehmen Sie zu einem festen Zeitpunkt eine feste Beschleunigung $\ddot{\mathbf{r}}_0$ und Geschwindigkeit β an.

Aufgabe 11 (2 Punkte): *Java-Applets*
Machen Sie sich mit den auf der Vorlesungshomepage verlinkten Java-Applets (*Computer-Visualisierungen (OWL-Projekt)*) vertraut.