Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. A. Knorr
Dr. Carsten Weber
Dipl.-Phys. Alexander Carmele
Dipl.-Phys. Frank Milde

25. November 2009

http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ws09_10/pvbs/edynamik/

8. Übungsblatt zur Theoretischen Physik III: Elektrodynamik

Abgabe: bis Mittwoch 16.12.2009 12:15 Uhr in der Vorlesung.

Aufgabe 21 (10 Punkte): *Grenzbedingungen für Felder*

Betrachten Sie eine Kugel mit Radius R im elektrischen Feld im quasistatischen Grenzfall. Die Kugel besitzt eine Dielektrizitätskonstante von ε_1 und der Außenraum hat eine Dielektrizitätskonstante von ε_2 ($\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2$). Das elektrische Feld ist bei genügenden Abstand von der Kugel homogen in z-Richtung orientiert. Berechnen Sie die Feldverteilung in Kugelkoordinaten. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

1. Legen Sie die Randbedingungen für das Potential φ für große Abstände von der Kugel fest $r \gg R$, unter der Annahme, dass dann $\mathbf{E} = E_0\mathbf{e}_z$ gilt.
2. Welche Stetigkeitsbedingungen gelten für $\mathbf{D}$ und $\mathbf{E}$ auf dem Rand der Kugel?
3. Lösen Sie die Poissiongleichung $\Delta\phi = 0$.

   Tipps:

   - Die Poissongleichung wird allgemein durch folgendes Funktionensystem gelöst:

   $$\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} (A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)}) Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{1}$$

   - Was folgt bei Zylindersymetrie für m? Inwieweit vereinfacht sich der Ansatz und die Kugelflächenfunktion $Y_{lm}(\theta,\phi)$?
   - Bestimmen Sie die Koeffizienten A_l und B_l für den Innen- und Außenraum!
   - Eliminieren Sie die auftretende Singularität im Innenraum.
   - Verwenden Sie schließlich die Stetigkeitsbedingungen, um die Koeffizienten A_l und B_l im Innen- und Aussenraum zu bestimmen.
4. Plotten (2D-Kontour- oder Dichteplot) und interpretieren Sie das Ergebnis! Welche Anwendungen könnte diese dielektrische Kugel für mögliche Messverfahren haben?

Bitte Rückseite beachten!⟶

8. Übung TPIII WS 09

Aufgabe 22 (10 Punkte): *Antenne*

1. Betrachten Sie eine lineare Antenne der Länge $2L$, die parallel zur z-Achse liegt. Für die Stromdichte innerhalb der Antenne gilt:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = I_0 \cos(kr)\delta(x)\delta(y)\mathbf{e}_z$$

   Bestimmen Sie nun im Fernfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ und $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, speziell für Fall, dass $L = \lambda/4$ ist.
   Hinweis:

$$\mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$
$$\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \mathbf{j}^t(\mathbf{r}') \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

   Entwickeln Sie wie in der VL $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ bis zur 1. Ordnung ($|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \approx r - \mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'/r$).
   In den Feldern können Terme, die proportional zu r^{-2} sind, vernachlässigt werden.

2. Bestimmen Sie r den Poyntingvektor der Antenne im Vakuum ($\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$). Ermitteln Sie daraus die mittlere abgestrahlte Leistung P auf der Oberfläche einer Kugel im Fernfeld.
   Hinweis: Der Poyningvektor kann als Energiestromdichte angesehen werden.

3. Zeigen Sie, dass sich die abgestrahlte Leisung als

$$P = \frac{1}{2} I_0^2 R$$

   darstellen lässt und geben Sie R explizit. Interpretieren Sie desweiteren R physikalisch.
   Hinweis:

$$\int_0^\pi da \frac{\cos^2(\pi/2\cos a)}{\sin a} \approx 1.35 \quad .$$