Dynamische Systeme und deterministisches Chaos

Maria Richter
TU Berlin

6. Dezember 2010

Abbildung 1: Lorenz-Attraktor

Abstract

Die meisten Systeme der realen Welt ändern ihren Zustand mit der Zeit. Viele Naturwissenschaften untersuchen die Gesetze solcher Systeme mit dem Ziel, dafür (vereinfachte) mathematische Modelle herzuleiten. Zeitabhängige Modelle treten meist als Differentialgleichungen (bei kontinuierlicher Zeit) oder als Rekursionsvorschriften (diskrete Zeit) auf. Im Fall gewöhnlicher Differentialgleichungen läßt sich die Existenz von Lösungen solcher Modelle unter einfachen Annahmen beweisen. Die Angabe expliziter Lösungen ist aber nur in einfachen Ausnahmefällen möglich. Wenn man an speziellen Lösungen interessiert ist, d.h. an der Simulation des Modells, muss man daher Computer und numerische Verfahren einsetzen. Oft ist man aber überhaupt nicht an einzelnen Lösungen interessiert, sondern an Aussagen über die Menge aller Lösungen, wie etwa das Verhalten über lange Zeiträume oder die Existenz von Gleichgewichten. Dies ist das Thema der Dynamischen Systeme. Wir werden sehen, dass man bei vielen Modellen kritische Punkte identifzieren kann, deren Analyse eine qualitative Aussage über das Verhalten aller Lösungen erlaubt. Teilweise läßt sich dadurch der Phasenraum, d.h. der Raum aller möglichen Zustände in verschiedene Bereiche zerlegen, in denen man das Verhalten der Lösungen vorhersagen kann, ohne diese im Einzelnen berechnen zu müssen.

Mathematische Modelle realistischer Systeme hängen immer auch von bestimmten Parametern ab, etwa Materialparametern (Physik), Re-/Produktionsraten (Biologie, Wirtschaft), Zinsniveaus (Finanzmathematik), etc. Bei vielen Systemen beobachtet man beim Überschreiten bestimmter Parameterwerte eine grundlegende Änderung der Lösungsstruktur (z. B. ein zu stark belasteter Stab knickt). Diesen Punkt nennt man eine Verzweigung oder Bifurkation. Durch Kenntnis der Bifurkationspunkte und weiterer Eigenschaften läßt sich daher das Verhalten eines Systems oder Modells weitgehend beschreiben.

Weiterhin wollen wir einen Einblick gewinnen in nichtlineare Systeme, die deterministisches chaotisches Verhalten zeigen. Zunächst erscheint der Begriff „deterministisches Chaos“ als ein Widerspruch in sich selbst, da das Unvorhersagbare nicht determiniert „sein kann“. Dieser scheinbare Widerspruch erklärt sich folgendermassen: Obwohl das Zeitverhalten der Systeme durch Differentialgleichungen vollständig beschrieben wird, aus denen sich Schritt für Schritt die Trajektorien berechnen lassen, benötigt man doch zum Finden einer Lösung die Kenntnis der Anfangsbedingungen. Deterministisch chaotisches Verhalten ist durch die Eigenschaft gekennzeichnet, dass kleine Abweichungen in den Anfangsbedingungen sich im Laufe der Zeit exponentiell verstärken. Dies bedeutet, dass das Verhalten des Systems als Funktion der Zeit irregulär und auf lange Sicht unvorhersagbar wird.

Gliederung

1. Dynamische Systeme
2. Lineare Stabilitätsanalyse von autonomen dynamischen Systemen
3. Bifurkationen
4. Beispiel für deterministisches Chaos: Das Lorenz-Modell

Aufgabenstellung

1. **Dynamische Systeme**

   Machen Sie sich mit dem Begriff „Dynamisches System“ vertraut. Geben Sie dazu die Definition und eine sinnvolle Klassifizierung von Dynamischen Systemen an. Erläutern Sie die Begriffe Phasenraumportrait (Zustandsraum) und Attraktor (Fixpunkte, Grenzzyklen, seltsame Attraktoren).

   In welchen wissenschaftlichen Bereichen werden dynamische Systeme studiert? Beschreiben Sie jeweils kurz ein bekanntes Beispiel von dynamischen Systemen in den unterschiedlichen Wissenschaften.

2. **Lineare Stabilitätsanalyse von autonomen dynamischen Systemen**

   Beschreiben Sie die Vorgehensweise zur linearen Stabilitätsanalyse von autonomen dynamischen Systemen.

   Worum handelt es sich bei einem Fixpunkt? Erläutern Sie die Charakterisierung des Fixpunkts eines dynamischen Systems. Gehen Sie dazu für den Fall eines 2-dim dynamischen Systems auf die Lage der Eigenwerte der Jacobi-Matrix in der komplexen Zahlenebene ein (stabiler/instabiler Knoten/Spirale, Sattelpunkt,Zentrum).

   Berechnen und charakterisieren Sie die Fixpunkte der folgenden Systeme. Skizzieren Sie jeweils das Phasenraumportrait.

   - $\dot{x} = f(x) = x^2 - 1$
   - 1-dim harmonischer Oszillator:

     $$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \rightarrow \underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\omega_0^2 x \end{pmatrix} = \underline{f}(\underline{x})$$

3. **Bifurkationen**

   Erläutern Sie die Begriffe Bifurkation und Bifurkationsdiagramm. Skizzieren Sie die verschiedenen Bifurkationstypen und geben Sie die entsprechenden Grundformen der jeweiligen dynamischen Systeme an (unterscheiden Sie dabei 1- und 2-dim dynamische Systeme).

   Gegeben seien folgende dynamische Systeme in Form von DGLen erster Ordnung (Beachte, dass das System (4) zweidimensional ist und aus 2 DGL besteht):

   - $\dot{x} = f_\mu(x) = x^2 - \mu \qquad (1)$
   - $\dot{x} = f_\mu(x) = x - \mu x(1 - x) \qquad (2)$
   - $\dot{x} = f_\mu(x) = x - \frac{\mu x}{1+x^2} \qquad (3)$
   - $\dot{x} = -y + \mu x + xy^2$
     $\dot{y} = x + \mu y - x^2 \qquad (4)$

   Berechnen Sie die Fixpunkte der Systeme (ein Fixpunkt für das System (4) genügt) und bestimmen Sie die Übergangspunkte μ_0 zwischen stabilem und instabilem Regime.
   Skizzieren Sie die Bifurkationsdiagramme, welche die stabilen (liniert) und instabilen (gestrichelt) Fixpunkte in Abhängigkeit vom Bifurkationsparameter μ darstellen. Verwenden Sie bei (4) Projektionen auf die $(x - \mu)$- bzw. $(y - \mu)$-Ebenen. Benennen Sie anhand der Graphen die Bifurkationstypen.

   Ausblick/Zusatz: Beschäftigen Sie sich mit der „Verhulst Dynamik“ (Populationsdynamik, logistische Gleichung) als mathematisches Beispiel für Periodenverdopplungen.

4. **Beispiel für deterministisches Chaos: Das Lorenz-Modell**

Erläutern Sie den Begriff deterministisches Chaos. Gehen Sie dazu auch auf die Begriffe „Laplacescher Dämon“, „Prinzip der schwachen/starken Kaualität“ und „Schmetterlingseffekt“ ein. Welche Eigenschaft muss ein dynamisches System aufweisen, damit die Möglichkeit auf ein chaotisches Verhalten besteht?

Das Bénard-Experiment

Beim Bénard-Experiment wird eine dünne, homogene Flüssigkeitsschicht, die sich in einem festen Behältnis und in einem Gravitationsfeld befindet, von der Unterseite erhitzt, während die Oberseite durch Kühlung auf einer niedrigeren Temperatur gehalten wird. Es bilden sich geometrisch strukturierte, vertikal angeordnete Konvektionszellen aus (siehe Bild unten). Auch in der Atmosphäre können thermisch

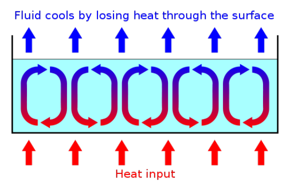

Abbildung 2: Schematische Darstellung der Bénard-Zellen

induzierte Strömungen zu Konvektionsrollen führen. Das Bénard-Experiment interessierte daher auch den Meteorologen Edward Lorenz. Im Jahre 1963 untersuchte er den Übergang der Wärmekonvektion in einen turbulenten Zustand innerhalb eines Mediums. Das von Lorenz zu diesem Zweck aufgestellte System aus drei autonomen Differentialgleichungen zeigte erstmals am Computer nachvollziehbares chaotisches Verhalten innerhalb eines deterministischen Systems. Lorenz entdeckte die empfindliche Abhängigkeit der Lösungskurven von den Anfangsbedingungen, nachdem er eine Computerberechnung mit denselben Anfangsbedingungen und denselben Parametern, aber mit weniger Stellen nach dem Komma wiederholte. Dabei stellte er zu seiner Überraschung fest, dass beide Berechnungen nach einiger Zeit keine Ähnlichkeit mehr miteinander hatten.

Heute ist das Lorenz-Modell eines der Standard-Modelle zur Untersuchung der Ausbildung von chaotischem Verhalten in dynamischen Systemen. Die Lorenz-Gleichungen sind drei relativ einfache, explizite, nichtlineare DGLn erster Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned}$$

mit drei Zustandsvariablen

$$\begin{aligned} &x \sim \textit{Amplitude der Strömungsgeschwindigkeit} \\ &y \sim \textit{Temperaturdifferenz zwischen auf- und absteigendem Fluid} \\ &z \sim \textit{Abweichung des vertikalen Temperaturprofils von einem linearen Verlauf} \end{aligned}$$

und drei positiven Parametern

$$\begin{aligned} &\sigma = \textbf{\textit{Prandtl-Zahl}} = \textit{kinematische Viskosität/Temperaturleitfähigkeit} \\ &r \sim \Delta T \quad \textit{mit } r = \textbf{\textit{Rayleigh-Zahl}} \\ &b = \textit{geometrischer Faktor} = 4\,(1 + a^2)^{-1} \quad \textit{mit } a = \textit{Höhe/Breite der Konvektionsrollen.} \end{aligned}$$

In den meisten Untersuchungen sind $\sigma = 10,\ b = 8/3$ und r wird als freier Kontrollparameter variiert.

Bestimmen Sie die drei Fixpunkte des Lorenz-Systems und untersuchen Sie sie auf ihre Stabilität.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die beiden nicht-trivialen Fixpunkte im Bereich $1 < r < r_{krit} := \sigma\frac{\sigma+b+3}{\sigma-b-1}$ für $\sigma > b+1$ stabil sind. (Im Parameterbereich $1 < r < r_{krit}$ beschreiben die Lorenz-Gleichungen die Konvektionsrollen des Bénard-Experimentes.) Nutzen Sie dazu das **Kriterium von Routh-Hurwitz**:

Alle Wurzeln des Polynoms $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ *(mit* $a_0 > 0$, $a_i =$ *reell) haben genau dann negative Realteile, wenn alle* n *Determinanten*

$$D_1 = a_1$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix} = a_n D_{n-1}$$

positv sind. Dabei gilt $a_m = 0$ *für* $m > n$.

Beispiel: Für ein Polynom dritten Grades $(n = 3)$ *müssen die ersten drei Determinanten* D_1, D_2, D_3 *berechnet werden mit* $a_4 = a_5 = 0$.

Lösen Sie das Differentialgleichungssystem numerisch für die Anfangswerte $x(0) = z(0) = 0,\ y(0) = 1$ und die Parameterwerte $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$ und plotten Sie das Ergebnis.

Hinweis: Nutzen Sie dazu beispielsweise das Programm Mathematica und die Befehle NDSolve[...], ParametricPlot3D[...] und Evaluate[...].

Viel Spaß und Erfolg!!!