1.4.8 Massepunktsysteme (MPS) / Systeme aus N MP

Ziel: Verallgemeinere die Newton´sche Mechanik auf Systeme aus N MP (m_i, $\underline{r}_i(t)$) und bestimme insbesondere die zeitliche Änderung von Impuls, Drehimpuls und Energie des MPS.

NBG für die einzelnen MP

$$m_i \ddot{\underline{r}}_i(t) = \underline{F}_i = \underbrace{\underline{F}_i^{(a)}(\underline{r}_i)}_{\substack{\text{äußere Kräfte} \\ \text{(äußere Felder,} \\ \text{Schwerkraft,...)}}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \underline{F}_{ik}^{(ww)}(\underline{r}_i, \underline{r}_k)}_{\substack{\text{innere Kräfte der MP aufeinander} \\ \text{Wechselwirkung zwischen den MP} \\ \text{(Gravitations- oder Coulomb-WW etc.)}}} \quad , \; i = 1, \ldots, N \quad \text{(A)}$$

- Impuls eines MPS

Wir definieren den Schwerpunkt des MPS mit dem Ortsvektor

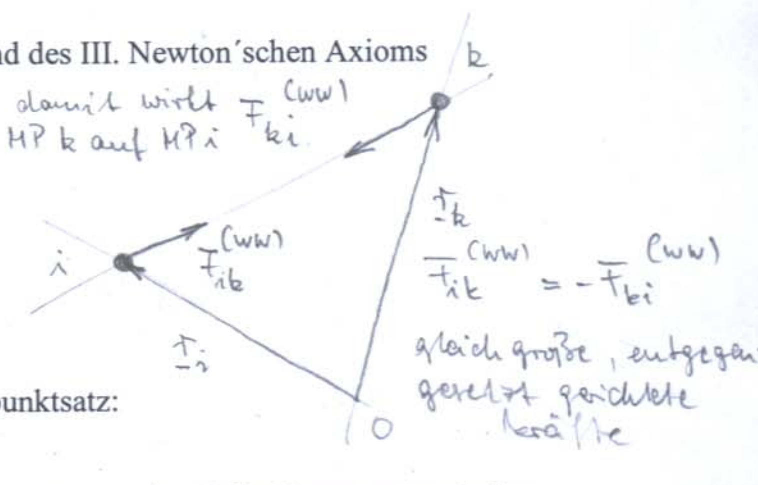
$$\underline{R}(t) := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \, \underline{r}_i(t) \quad \text{mit der Gesamtmasse} \quad M := \sum_{i=1}^{N} m_i \quad \text{des MPS.}$$

Für die Bewegungsgleichung des Schwerpunkts finden wir über $\sum_{i=1}^{N}(A)$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\underline{r}}_i = M \ddot{\underline{R}} = \sum_{k=1}^{N} \underline{F}_i^{(a)}(\underline{r}_i) + \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^{N} \underline{F}_{ik}^{(ww)}(\underline{r}_i, \underline{r}_k) \, .$$

Da der letzte Term auf der rechten Seite auf Grund des III. Newton´schen Axioms

$$\sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^{N} \underline{F}_{ik}^{(ww)} \overset{i \leftrightarrow k}{=} \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^{N} \underline{F}_{ki}^{(ww)} \overset{\text{III.NA}}{=} - \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^{N} \underline{F}_{ik}^{(ww)\;1)} \, .$$



verschwindet, ergibt sich

$$M \ddot{\underline{R}}(t) = \sum_{k=1}^{N} \underline{F}_i^{(a)}(\underline{r}_i(t)) \qquad \rightarrow \text{Schwerpunktsatz:}$$

Der Schwerpunkt eines Systems aus N MP bewegt sich so, als sei die Gesamtmasse in ihm vereinigt und als wirke auf ihn die Vektorsumme aller äußeren Kräfte.

Mit anderen Worten: Die Wechselwirkung der MP untereinander hat keinen Einfluss auf die Bewegung des Schwerpunkts des MPS.

Ist die Summe der äußeren Kräfte auf ein MPS gleich Null, so folgt

$$M\,\dot{\underline{R}}(t) = \sum_{i=1}^{N} m_i\,\underline{r}_i(t) =: \underline{P}(t) = \text{const}$$

$\rightarrow$ der Schwerpunktsimpuls/Gesamtimpuls des MPS P(t) ist in diesem Fall eine Erhaltungsgröße / Integral der Bewegung.
Schlussfolgerung: Ist die Summe der äußeren Kräfte gleich Null, bewegt sich der Schwerpunkt geradlinig gleichförmig, d.h. ein mit dem Schwerpunkt verbundenes KS ist IS und besonders geeignet zur Beschreibung der Bewegung des MPS.

- **Drehimpuls eines MPS**

$$\underline{L} = \sum_{i=1}^{N} \underline{l}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i\,(\underline{r}_i \times \dot{\underline{r}}_i) \qquad \rightarrow \quad \underline{\text{Drehimpuls des MPS}}$$

$$\frac{d\underline{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i\,(\underline{r}_i \times \dot{\underline{r}}_i) = \sum_{i=1}^{N} m_i\,\underbrace{(\dot{\underline{r}}_i \times \dot{\underline{r}}_i)}_{0} + \sum_{i=1}^{N} m_i\,(\underline{r}_i \times \ddot{\underline{r}}_i) \overset{\text{II. NA}}{=} \sum_{i=1}^{N} \underline{r}_i \times \underline{F}_i^{(a)} + \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^{N} \underline{r}_i \times \underline{F}_{ik}^{(ww)}$$

Für den letzten Term auf der rechten Seite haben wir

$$\sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^{N} \underline{r}_i \times \underline{F}_{ik}^{(ww)} \overset{i \leftrightarrow k}{=} \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^{N} \underline{r}_k \times \underline{F}_{ki}^{(ww)} \overset{\text{III. NA}}{=} -\sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^{N} \underline{r}_k \times \underline{F}_{ik}^{(ww)} \;,$$

$$\text{d.h.} \quad \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^{N} \underline{r}_i \times \underline{F}_{ik}^{(ww)} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^{N} (\underline{r}_i - \underline{r}_k) \times \underline{F}_{ik}^{(ww)} = 0$$

denn Kräfte, die zwei MP aufeinander ausüben, wirken in Richtung der Verbindungslinie zwischen beiden (vgl. Skizze S. 1). Damit ist

$$\frac{d\underline{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \underline{r}_i \times \underline{F}_i^{(a)} =: \underline{M} \qquad\qquad \underline{\frac{d\underline{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \underline{r}_i \times \underline{F}_i^{(a)} =: \underline{M}}$$

→ Die zeitliche Änderung des Gesamtdrehimpulses eines MPS ist gleich dem Gesamtdrehmoment der äußeren Kräfte.

Wirken keine äußeren Kräfte, so ist $\underline{L}\left(\underline{r}_1(t), \underline{r}_N(t), \ldots, \dot{\underline{r}}_1(t), \ldots \dot{\underline{r}}_N(t)\right)$ eine Erhaltungsgröße / ein Integral der Bewegung

$$\underline{\underline{F}_i^{(a)} = 0 \leftrightarrow \underline{L} = \text{const}}$$

■ Zwei-Körper-Problem ohne äußere Felder, Planetenbewegung, ebene Bahnkurven, …

- **Energie eines MPS**

Aus der NBG erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{\underline{r}}_i \cdot (A) \;\rightarrow\; \sum_{i=1}^{N} \dot{\underline{r}}_i \cdot m_i \ddot{\underline{r}}_i = \sum_{k=1}^{N} \dot{\underline{r}}_i \cdot \underline{F}_i = \sum_{k=1}^{N} \dot{\underline{r}}_i \cdot \left(\underline{F}_i^{(K)} + \underline{F}_i^{(D)}\right) ,$$

wobei wir nun auf der rechten Seite zwischen **konservativen** und **dissipativen** Kräften unterscheiden wollen.

Die konservativen Kräfte sind als Gradient des Potenzials $U(\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_N)$ darstellbar

$$\underline{F}_i^{(K)} = -\frac{\partial U(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \ldots, \underline{r}_N)}{\partial \underline{r}_i} = -\underline{\nabla}_i \, U(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \ldots, \underline{r}_N) \,.$$

Mit $\quad \sum_{i=1}^{N} \dot{\underline{r}}_i \cdot m_i \ddot{\underline{r}}_i == \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\underline{r}}_i^2\right) = \frac{dT}{dt}, \quad T := \sum_{k=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\underline{r}}_i^2$ $\to$ <u>kinetische Energie des MPS</u>

und $\quad \sum_{i=1}^{N} \dot{\underline{r}}_i \cdot \underline{F}_i^{(K)} = -\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial \underline{r}_i} \cdot \dot{\underline{r}}_i = -\frac{dU}{dt}$ (vorausgesetzt, U nicht explizit zeitabhängig)

folgt $\quad \underline{\frac{d}{dt}(T+U) = \sum_{k=1}^{N} \dot{\underline{r}}_i \cdot \underline{F}_i^{(D)}}$.

Verschwindet die rechte Seite (Leistung der dissipativen Kräfte Null), gilt

<u>**T + U = E = const $\to$ Energieerhaltung**</u> $\quad\to$ mechanische Energie Integral der Bewegung

- Potenzial der konservativen Kräfte

$$U(\underline{r}_1, \underline{r}_2, ..., \underline{r}_N) = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} U_i(\underline{r}_i)}_{\text{äußere Felder}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{N} U_{ik}(\underline{r}_i, \underline{r}_k)}_{\text{Wechselwirkungsanteil}}$$ ist die gesamte potenzielle Energie des MPS.

Für die <u>äußeren Felder</u> haben wir $\underline{F}_i^{(a)} = -\frac{\partial U_i(\underline{r}_i)}{\partial \underline{r}_i}$.

Für den <u>Wechselwirkungsanteil</u> kann U_{ik} ($\underline{r}_i$, $\underline{r}_k$) nur von den drei Skalaren r_i^2, r_k^2 und $(\underline{r}_i - \underline{r}_k)^2$ abhängen. Alle anderen Skalare wie $\underline{r}_i \cdot \underline{r}_k$ und $(\underline{r}_i + \underline{r}_k)^2$ sind Linearkombinationen dieser drei. Nun ist aber das II. NA nur erfüllt, wenn

$$\underline{F}_{ik}^{(ww)}(\underline{r}_i, \underline{r}_k) := -\frac{\partial U_{ik}(|\underline{r}_i - \underline{r}_k|)}{\partial \underline{r}_i} = -\frac{\partial U_{ik}(|\underline{r}_i - \underline{r}_k|)}{\partial \underline{r}_k} = -\underline{F}_{ki}^{(ww)}(\underline{r}_k, \underline{r}_i) \quad i,k = 1,...,N .$$

■ MPS aus N elektrisch geladenen Teilchen ($\underline{r}_i$, q_i) im Schwerefeld der Erde (nahe der Erdoberfläche, $\underline{g} = -g\,\underline{e}_z$): $\quad U(\underline{r}_1, \underline{r}_2, ..., \underline{r}_N) = \sum_{i=1}^{N} m_i\, g\, z_i + \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i\neq k=1}^{N} \frac{q_i q_k}{|\underline{r}_i - \underline{r}_k|}$.

Bemerkungen

(i) Ist U explizit zeitabhängig, so gilt

$$\underline{F}\cdot\dot{\underline{r}} = -\frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} - \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} - \frac{\partial U}{\partial z}\dot{z} = -\underline{\nabla}U\cdot\dot{\underline{r}} \neq -\frac{dU}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial t} - \underline{\nabla}U\cdot\dot{\underline{r}}$$

Die allgemeine Form einer konservativen Kraft lautet

$\underline{F} = -\operatorname{grad} U(\underline{r}) + \dot{\underline{r}}\times\underline{A}(\underline{r},t)$ wobei U nicht explizit t abhängig und A beliebig.

■ $\underline{A} = q\ \dot{\underline{r}}\times\underline{B}$ $\rightarrow$ Lorentz-Kraft (verrichtet keine Arbeit)

(ii) Wiederhole die Bestimmung der Potentiale aus gegebenen konservativen Kräften

Die Arbeit

$$A = \int_{\underline{r}_0,C}^{\underline{r}} d\underline{r}'\cdot\underline{F}_i^{(a)} = -\int_{\underline{r}_0}^{\underline{r}} d\underline{r}'\cdot\underline{\nabla}_i U_i = \int_{\underline{r}_0}^{\underline{r}} dU_i = -U_i(\underline{r}) + U_i(\underline{r}_0)\ , \quad (\text{ Potenzialdifferenz })$$

die die äußere Kraft <u>am</u> i-ten Teilchen (MP) auf dem Wege von $\underline{r}_0$ nach $\underline{r}$ leistet ist wegunabhängig. Allgemein gilt bei Verwendung einer Parametrisierung $\underline{r}(t)$

$$A = \int_{1,C}^{2} d\underline{r}\cdot\underline{F}^{(a)}(\underline{r}) = \int_{t_1}^{t_2} dt\,\frac{d\underline{r}}{dt}\cdot\underline{F}^{(a)}(\underline{r}(t)) = \int_{t_1}^{t_2} dt\ \underline{v}(t)\cdot\underline{F}^{(a)}(\underline{r}(t))$$

also z.B.

$$U_i(\underline{r}) - U_i(\underline{r}_0) = -\int_{\underline{r}_0}^{\underline{r}} d\underline{r}'\cdot\underline{F}_i^{(a)} = -\int_{x_0}^{x} dx'\ \underline{F}_{i,x}^{(a)}(x',y_0,z_0) - \int_{y_0}^{y} dy'\ \underline{F}_{i,y}^{(a)}(x_0,y',z_0) - \int_{z_0}^{z} dz'\ \underline{F}_{i,z}^{(a)}(x_0,y_0,z').$$

Für den konservativen Anteil der inneren (ww) Kräfte haben wir $\underline{F}_{ik}^{(ww)} \parallel (\underline{r}_i - \underline{r}_i)$, da die Kraft in Richtung des Relativvektors wirkt. Für ein herausgegriffenes Indexpaar kann man $\underline{r} := \underline{r}_i - \underline{r}_i$ einführen und erhält $\underline{F}_{ik}^{(ww)}(\underline{r}) = -\underline{\nabla}\,U_{ik}^{(ww)}(r)$ und $\underline{F}_{ik}^{(ww)}(\underline{r}) = \underline{F}_{ik}^{(ww)}(r)\underline{e}_r$. Aus

$\underline{F}_{ik}^{(ww)}(\underline{r}) = -\dfrac{dU_{ik}^{(ww)}(r)}{dr}$ wird dann das WW-Potenzial durch einfache Integration ermittelt.

1.4.9 Newton`sche Bewegungsgleichung für ein MPS in verallgemeinerten / krummlinigen Koordinaten

Erinnere: Rezept zur Lösung von Bewegungsproblemen auf der Basis der NBG.

Zwei Fragen stellen sich: (i) Wie sieht eigentlich die NBG in verallgemeinerten krummlinigen Koordinaten aus? → Koordinateninvariante Formulierung der NBG.

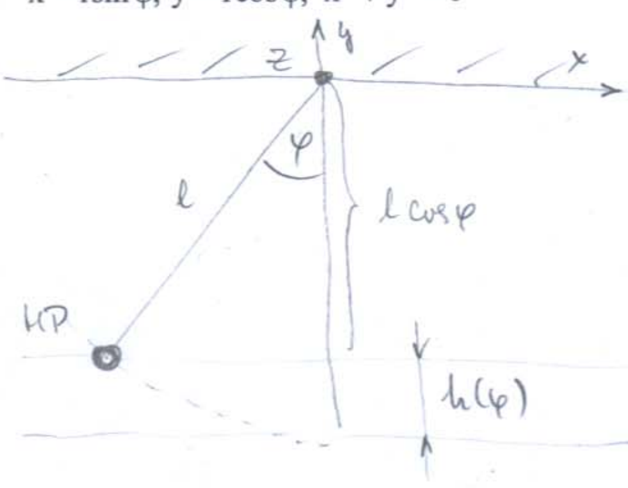
(ii) Bisher haben wir immer angenommen, die resultierende wirkende Kraft sei vor der Lösung der BWG bekannt. Liegen allerdings Bewegungsbeschränkungen vor, d.h. wenn Zwangskräfte wirken, ist diese Voraussetzung u.U nicht einfach zu erfüllen (s.u.)

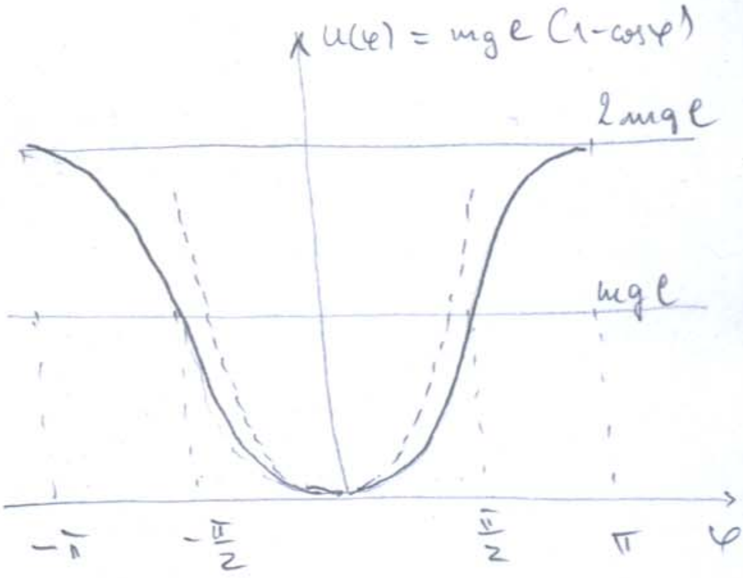
■ **Ebenes mathematisches Pendel**

MP (m) an einem Faden/einer gewichtslosen Stange der Länge l

Bewegung des MP durch Zwangskraft (Fadenspannkraft) auf eine Kreisbahn eingeschränkt.
Bewegungsbeschränkung $x^2 + y^2 = l^2$ infolge der Fadenspannkraft/Zwangskraft.
Verwende anstelle der kartesischen Koordinaten x,y zur Festlegung der Lage des MP den Auslenkwinkel φ (Beispiel für eine verallgemeinerte Koordinate, keine Länge, $[\varphi] \neq$ m !!).

$x = l\sin\varphi,\ y = l\cos\varphi,\ x^2 + y^2 = l^2$





Die potenzielle Energie des MP ist $U(\varphi) = mgh(\varphi) = mgl(1-\cos\varphi) \overset{\varphi \ll 1}{\approx} mgl\,\frac{\varphi^2}{2}$.

Obwohl die "Koordinate" φ die Lage des Massepunkts eindeutig bestimmt, lautet die NBG

für die Bahnkurve offensichtlich <u>nicht</u> $m\ddot{\varphi} = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -mg\,l\sin\varphi$ also $m\ddot{\varphi} + g\,l\sin\varphi = 0$!

Ableitung der Pendelgleichung:

<u>(i) Aus dem Energieerhaltungssatz</u> $\frac{m}{2}(l\dot{\varphi}^2) + mg\,l(1-\cos\varphi) = E = mg\,l(1-\cos\varphi_0)$

(φ_0 - maximale Auslenkung des Pendels) folgt

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2g}{l}(\cos\varphi - \cos\varphi_0) \quad \text{also} \quad 2\dot{\varphi}\;\ddot{\varphi} = -\frac{2g}{l}\sin\varphi\;\dot{\varphi} \quad \text{also} \quad \underline{\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0}$$

<u>(ii) Polarkoordinaten verwenden:</u>

$$\underline{r} = r\,\underline{e}_r = l\,\underline{e}_r$$

$$\underline{\dot{r}} = l\,\underline{\dot{e}}_r = l\dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi$$

$$\underline{\ddot{r}} = l\ddot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi - l\dot{\varphi}^2\,\underline{e}_r$$

$$\underline{\nabla}U = \underline{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \underline{e}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$m\,\underline{\ddot{r}} = l\ddot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi - l\dot{\varphi}^2\,\underline{e}_r$$

Kraftkomponenten in tangentialer Richtung (φ - Richtung):

$$m\;l\ddot{\varphi} = -\frac{1}{l}\frac{\partial U}{\partial\varphi} = -\frac{1}{l}mg\,l\;\sin\varphi \qquad \text{also wieder} \qquad \underline{\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0}\;.$$

<u>(iii) Aus der Grundgleichung der Drehbewegung</u>

Drehmoment der Schwerkraft und Drehimpuls bzgl. des Aufhängepunkts führen über

$$\frac{d\underline{L}}{dt} = \underline{M} \quad \text{auf} \quad m\,l^2\frac{d}{dt}\dot{\varphi}\;\underline{e}_z = -l\,mg\sin\varphi\;\underline{e}_z\;, \text{ also wieder auf } \quad \underline{\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0}\;.$$

Behauptung: Das System der Newton´schen Bewegungsgleichungen für ein MPS aus N MP mit der (der Einfachheit halber) gleichen Masse

$$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F},\ \underline{r} = \{r_1, r_2, ..., r_{3N}\}$$

ist äquivalent zu den Gleichungen

$$\underline{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0,\ k = 1,...,f}$$

wobei $\underline{L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) = T(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) - U(\underline{q}, t)}$ $\rightarrow$ **Lagrange-Funktion** des MPS.

$\underline{q} = \{q_1, q_2, ..., q_f\}$ sind **verallgemeinerte Koordinaten** (φ im Fall des Pendels) und $\rightarrow f$ ist die Zahl der Freiheitsgrade des mechanischen Systems, d.h. die minimale Anzahl unabhängiger Größen zur eindeutigen Bestimmung der Position aller MP/Teilchen.

■ Ebenes mathematisches Pendel: zwei kartesische Koordinaten $x = l\sin\varphi,\ y = l\cos\varphi$; eine Zwangbedingung $x^2 + y^2 = l^2$; also eine unabhängige verallgemeinerte Koordinate, φ.

■ Unterliegen N Massepunkte R Zwangbedingungen, ergibt sich die Zahl der Freiheitsgrade zu $f = 3N - R$.

Faktisch behaupten wir, die Form der NBG in verallgemeinerten Koordinaten sei die oben angegebene. Zum Beweis führen wir die Koordinatentransformation

$$\underline{r} = \underline{r}(\underline{q})$$

explizit aus.

Geschwindigkeit: $$\underline{\dot r} = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_i}\dot q_i = \sum_{i=1}^{f} \underline{e}_i \cdot \dot q_i\,,\quad \underline{e}_i := \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_i} = \underline{e}_i(\underline{q}) \qquad \text{(H1)}$$

Die Größen $\underline{\dot q} = \{\dot q_1, \dot q_2, ..., \dot q_f\}$ nennen wir **verallgemeinerte Geschwindigkeiten.** Also ist

$$m\,\underline{\ddot r} = m\sum_{i=1}^{f}\left(\sum_{j=1}^{f}\frac{\partial \underline{e}_i}{\partial q_j}\dot q_j\,\dot q_i + \underline{e}_i \ddot q_i\right) = \underline{F} \quad \Big|\cdot \underline{e}_k$$

$$\underline{F}\cdot \underline{e}_k = m\sum_{i,j=1}^{f}\frac{\partial \underline{e}_i}{\partial q_j}\cdot \underline{e}_k \dot q_i \dot q_j + m\sum_{i=1}^{f}\underline{e}_i \cdot \underline{e}_k\,\ddot q_i \qquad \text{(H2)}$$

Wir wollen versuchen, die $\underline{e}_i$ zu eliminieren und vollständig zu skalaren Größen überzugehen (erinnere Pendel).

Kinetische Energie: $$T = \frac{m}{2}\underline{\dot r}^2 \overset{\text{(H1)}}{=} \frac{m}{2}\sum_{i,j=1}^{f}\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j\,\dot q_i\,\dot q_j =: \tilde T(\underline{q},\underline{\dot q})$$

$$\frac{\partial \tilde T}{\partial \dot q_k} = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{f}\underline{e}_i\cdot \underline{e}_k\,\dot q_i + \frac{m}{2}\sum_{j=1}^{f}\underline{e}_k\cdot \underline{e}_j\,\dot q_j = m\sum_{i=1}^{f}\underline{e}_i\cdot \underline{e}_k\,\dot q_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde T}{\partial \dot q_k}\right) = m\sum_{i=1}^{f}\left(\sum_{j=1}^{f}\frac{\partial \underline{e}_i}{\partial q_j}\dot q_j\cdot \underline{e}_k\,\dot q_i + \sum_{j=1}^{f}\underline{e}_i\cdot\frac{\partial \underline{e}_k}{\partial q_j}\dot q_j\,\dot q_i + \underline{e}_i\cdot \underline{e}_k\,\ddot q\right) =$$

$$= \underbrace{m\sum_{i,j=1}^{f}\frac{\partial \underline{e}_i}{\partial q_j}\cdot \underline{e}_k\,\dot q_j\,\dot q_i + m\sum_{i=1}^{f}\underline{e}_i\cdot \underline{e}_k\,\ddot q_i}_{\text{vgl. rechte Seite von (H2)}} + \underbrace{m\sum_{i,j=1}^{f}\underline{e}_i\cdot\frac{\partial \underline{e}_k}{\partial q_j}\dot q_j\,\dot q_i}_{\text{ersetze durch } \frac{\partial \tilde T}{\partial q_k}\ \text{(H4)}} \qquad \text{(H3)}$$

$$\frac{\partial \tilde T}{\partial q_k} = \frac{m}{2}\sum_{i,j=1}^{f}\frac{\partial \underline{e}_i}{\partial q_k}\cdot \underline{e}_j\,\dot q_i\,\dot q_j + \frac{m}{2}\sum_{i,j=1}^{f}(i\leftrightarrow j) = m\sum_{i,j=1}^{f}\frac{\partial \underline{e}_i}{\partial q_k}\cdot \underline{e}_j\,\dot q_i\,\dot q_j \overset{i\leftrightarrow j}{=} m\sum_{i,j=1}^{f}\frac{\partial \underline{e}_j}{\partial q_k}\cdot \underline{e}_i\,\dot q_i\,\dot q_j =$$

$$= m\sum_{i,j=1}^{f}\underline{e}_i\cdot\frac{\partial \underline{e}_k}{\partial q_j}\,\dot q_i\,\dot q_j \ \text{(H4)},\quad \text{denn}\quad \frac{\partial \underline{e}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\partial \underline{r}}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k}\frac{\partial \underline{r}}{\partial q_j} = \frac{\partial \underline{e}_j}{\partial q_k}\,.$$

(H3) und (H4) in (H2) ergibt

$$\underline{F} \cdot \underline{e}_k = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_k}\right) \quad \text{(H5)}$$

Wir nehmen nun an, $\underline{F}$ sei <u>konservativ</u>, $\underline{F} = -\operatorname{grad} U(\underline{r}, t) = -\frac{\partial U(\underline{r}, t)}{\partial \underline{r}}$.

Nach der Transformation $\underline{r} = \underline{r}(\underline{q})$ ergibt sich eine Funktion $\tilde{U}(\underline{q}, t)$ und wir haben

$$\underline{F} \cdot \underline{e}_k = -\frac{\partial U}{\partial \underline{r}} \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_k} = -\sum_{i=1}^{f} \frac{\partial U}{\partial r_i} \frac{\partial r_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial U}{\partial q_k}$$

Eingesetzt in (H5) folgt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial (\tilde{T} - \tilde{U})}{\partial q_k} = 0 .$$

Wenn wir nun noch annehmen, das <u>U nicht von den verallgemeinerten Geschwindigkeiten abhängt</u>, folgt die Behauptung

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad \text{für } L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = T(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) - U(\underline{q}, t) \quad (k = 1, \dots, f). \quad \text{(H)}$$

L ist die nichtrelativistische Lagrang-Funktion des betrachteten physikalischen Systems (hier MPS aus N MP/T. Sie ist die Differenz aus kinetischer und potenzieller Energie, <u>ausgedrückt als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten und Geschwindigkeiten q bzw.</u> $\underline{\dot{q}}$ <u>.</u>

(H) sind die Lagrange´schen BWG II. Art. Es handelt sich um f ODE 2. Ordnung für die Bahnkurven $\underline{q}(t)$ in verallgemeinerten Koordinaten.