2. Formulierung der Klassischen Mechanik nach Lagrange und Euler

2.1 Ableitung der Newton´schen Bewegungsgleichung aus einem Variationsprinzip

Betrachte einen Körper/MP (Masse m), der sich im Potenzial $U(\underline{r})$ bewegt, dessen Lagrange-Funktion also

$$L(\underline{r},\dot{\underline{r}}) = \frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2 - U(\underline{r})$$

lautet. Wir führen → die **Wirkung S** / das Funktional der Wirkung als neue fundamentale Größe ein

$$S[\underline{r}(t)] := \int_{t_1}^{t_2} dt\ L\left(\underline{r}(t),\dot{\underline{r}}(t)\right)\ .$$

Für jede Trajektorie $\underline{r}(t)$ zwischen den Positionen $\underline{r}(t_1)$ und $\underline{r}(t_2)$ ist das Funktional eine bestimmte Zahl.

Wir betrachten nun für eine gegebene Trajektorie $\underline{r}(t)$ kleine Abweichungen $\delta\,\underline{r}(t)$ (→ Variationen entlang der betrachteten Bahnkurve) mit $\delta\,\underline{r}(t_1) = 0$ und $\delta\,\underline{r}(t_2) = 0$.

$$\tilde{\underline{r}}(t) = \underline{r}(t) + \delta\underline{r}(t)\,,\ \delta\underline{r}(t_1) = \delta\underline{r}(t_2) = 0$$

Beim Übergang von $\underline{r}(t)$ zu $\tilde{\underline{r}}(t)$ variiert die Wirkung um

$$\delta S := S[\tilde{\underline{r}}(t)] - S[\underline{r}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{m}{2}(\dot{\underline{r}} + \delta\dot{\underline{r}})^2 - U(\underline{r}+\delta\underline{r})\right] - \int_{t_1}^{t_2} dt\left[\frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2 - U(\underline{r})\right].$$

Für <u>kleine Variationen</u> $\delta\,\underline{r}(t)$ der Trajektorie finden wir in linearer Näherung (Taylor-Reihe) für die Variation der Wirkung δS

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(m\,\dot{\underline{r}} \cdot \delta\dot{\underline{r}} - \left.\frac{\partial U}{\partial \underline{r}}\right|_{\underline{r}(t)} \cdot \delta\underline{r} \right) + O\left((\delta\underline{r})^2, (\delta\dot{\underline{r}})^2\right) =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[m \frac{d}{dt}(\dot{\underline{r}} \cdot \delta\underline{r}) - m\,\ddot{\underline{r}} \cdot \delta\underline{r} - \left.\frac{\partial U}{\partial \underline{r}}\right|_{\underline{r}(t)} \cdot \delta\underline{r} \right] = \underbrace{m\,(\,\dot{\underline{r}} \cdot \delta\underline{r}\,)\Big|_{t_1}^{t_2}}_{0,\ \text{da}\ \delta\underline{r}(t_1)=\delta\underline{r}(t_2)=0} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left(-m\,\ddot{\underline{r}} - \left.\frac{\partial U}{\partial \underline{r}}\right|_{\underline{r}(t)} \right) \cdot \delta\underline{r}$$

Wir erkennen, dass die Variation der Wirkung δS für beliebige kleine Variationen der Trajektorie $\delta\underline{r}$ nur dann verschwindet, wenn die ungestörte Trajektorie $\underline{r}(t)$ der Newton´schen BWG genügt:

$$\underline{\delta S = 0 \text{ für kleine, aber beliebige } \delta\underline{r}(t) \text{ mit } \delta\underline{r}(t_1) = \delta\underline{r}(t_2) = 0, \text{ wenn } m\ddot{\underline{r}}(t) = -\left.\frac{\partial U}{\partial \underline{r}}\right|_{\underline{r}(t)} = F(\underline{r}(t)).}$$

Das bedeutet:

(i) Die NBG ist äquivalent/ergibt sich aus der Forderung $\underline{\delta S[\underline{r}(t)] := \delta \int_{t_1}^{t_2} dt\ L\left(\underline{r}(t), \dot{\underline{r}}(t)\right) = 0}$.

Statt der Gültigkeit des II.NA kann man die <u>Extremalität der Wirkung entlang der Bahnkurve</u> postulieren. Man gelangt zu einer vollkommen neuen, alternativen Formulierung der Mechanik, deren Verallgemeinerungen sich bis in die Feldtheorie erstrecken (s.u.).

(ii) Die in der Natur/Experiment realisierte Bahnkurve zwischen den Orten mit den Radiusvektoren $\underline{r}(t_1)$ und $\underline{r}(t_2)$ zeichnet sich unter allen denkbaren Trajektorien dadurch aus, dass die Wirkung extremal (meist minimal) ist.

2.2 Einschub Variationsrechnung

1696 formulierte Jacob Bernoulli das Brachystochronenproblem ($\rightarrow$ Notrutsche), das als Geburtsstunde der Variationsrechnung gilt:

Entlang welcher Kurve y(x) gelangt ein
reibungsfrei im Schwerefeld gleitender

Körper in kürzester Zeit von $P_1(x_1,y_1)$
nach $P_2(x_2,y_2)$?

Zeit: $T = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v}$, Wegelement: $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx\sqrt{1+y'^2}$

Energieerhaltung: $\frac{m}{s} v^2 = mg(y_1 - y)$, also $v^2 = 2g(y_1 - y)$.

Insgesamt ergibt sich $T[\, y(x) \,] = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{\frac{1+y'^2(x)}{2g\left[\, y_1 - y(x) \,\right]}}$.

Damit T für die Kurve y(x) minimal wird, muss $T[y(x) + \delta y(x)] > T[y(x)]$ für beliebige, hinreichend kleine $\delta y(x)$ gelten.

Betrachte Funktionale der Form

$$F[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} dx\; f(y, y', x), \quad y(x_1) = y_1,\; y(x_2) = y_2$$

F[y] hat ein Extremum bei y(x), wenn für die Variation des Funktionals, δF, gilt

$$\delta F := F[y + \delta y] - F[y] = 0. \qquad \text{(notwendige Bedingung)}$$

Um die Frage nach der notwendigen Bedingung für die Extremalität des Funktionals F[y(x)] auf die nach dem Extremum einer Funktion zurückführen zu können (also die Berechnung der Funktionalableitung auf die Differentiation einer Funktion nach einem Parameter zurückzuführen) setzen wir

$\delta y = \delta y(x) = \varepsilon\, \eta(x)$, ε infinitesimal klein,
$\eta(x)$ differenzierbar mit $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$

und fassen das Funktional als Funktion des Parameters ε auf

$$F[y(x) + \delta y(x)] = F[y(x) + \varepsilon\, \eta(x)] = F(\varepsilon).$$

Die notwendige Bedingung für ein lokales Extremum von $F(\varepsilon)$ lautet

$$\left.\frac{dF(y+\varepsilon\eta)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0\ ,\ \text{ für alle hinreichend kleinen } \eta(x)\ .$$

Aus $dF(y+\varepsilon\eta)=\int_{x_1}^{x_2}dx\ f(y+\varepsilon\eta, y'+\varepsilon\eta', x)+\frac{\partial f}{dy}\varepsilon\eta(x)+\frac{\partial f}{dy'}\varepsilon\frac{d\eta}{dx}+\ldots$ folgt

$$\left.\frac{dF(y+\varepsilon\eta)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\int_{x_1}^{x_2}dx\left(\frac{\partial f}{dy}\eta(x)+\frac{\partial f}{dy'}\frac{d\eta}{dx}\right)=\int_{x_1}^{x_2}dx\ \frac{\partial f}{dy}\eta(x)+\underbrace{\left.\eta(x)\frac{\partial f}{dy'}\right|_{x_1}^{x_2}}_{\eta(x_1)=\eta(x_2)=0}-\int_{x_1}^{x_2}dx\ \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{dy'}\right)\eta(x)\ .$$

Also ist $\int_{x_1}^{x_2}dx\left[\frac{\partial f}{dy}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{dy'}\right)\right]\eta(x)=0$ für beliebige hinreichend kleine $\eta(x)$. Damit muss $y(x)$ der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial f(y,y',x)}{dy'}\right]-\frac{\partial f(y,y',x)}{dy}=0$$

genügen $\rightarrow$ **Euler-Lagrange-Gleichung der Variationsrechnung**.

Verallgemeinert auf ein Funktional von n Funktionen $y_i(x)$ <u>einer</u> Variablen x mit festen Randwerten $y_i(x_1) = y_{i1}$, $y_i(x_2) = y_{i2}$, $i = 1,2,\ldots,n$ findet man auf analoge Weise durch Betrachtung der Funktion $F(\varepsilon_1, \varepsilon_2,\ldots, \varepsilon_n)$ zum Funktional $F[y_1+\varepsilon_1\eta_1,\ldots,y_n+\varepsilon_1\eta_n]$ als notwendige Bedingung für $\delta F = 0$, dass die Funktionen $y_i(x)$ den Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial f(\underline{y},\underline{y}',x)}{dy_i'}\right]-\frac{\partial f(\underline{y},\underline{y}',x)}{dy_i}=0,\ i=1,2,\ldots,n$$

genügen müssen.

2.3 Lagrange-Gleichungen II. Art

Über die Zuordnungen/Entsprechungen

$$x \leftrightarrow t\,,\;\; \underline{y}(x) \leftrightarrow \underline{q}(t)\,,\;\; f(\underline{y},\underline{y}',x) \leftrightarrow L(\underline{q},\dot{\underline{q}},t) \;\text{ und }\; F[\underline{y}] = \int_{x_1}^{x_2} dx\; f(\underline{y},\underline{y}',x) \leftrightarrow S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt\; L(\underline{q},\dot{\underline{q}},t)$$

erkennt man aus Kapitel 2.2, dass Lösungen $\underline{q}(t)$ der Gleichungen $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{d\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{dq_i} = 0,\; i = 1,2,...,f$ das Wirkungsfunktional $S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt\; L(\underline{q},\dot{\underline{q}},t)$ extremalisieren,

und dass diese Gleichungen aus der Bedingung $\delta S[q] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt\; L(\underline{q},\dot{\underline{q}},t) = 0$ folgen. Dies kann man leicht noch einmal direkt mit den schon in 2.1/2.2 verwendeten Methoden zeigen.

Dazu betrachten wir ein physikalisches System, dessen Zustand durch f verallgemeinerte Koordinaten $\underline{q}(t) = (q_1(t), q_2(t), \ldots, q_f(t))$ und f entsprechende verallgemeinerte Geschwindigkeiten $\dot{\underline{q}}(t) = (\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \ldots, \dot{q}_f(t))$ beschrieben wird. Seine Lagrange-Funktion sei $L(\underline{q},\dot{\underline{q}},t) = T(\underline{q},\dot{\underline{q}},t) - U(\underline{q},t)$. Für die Variation der Wirkung infolge einer Variation $\delta\underline{q}(t)$ entlang einer Trajektorie $\underline{q}(t)$ mit $\delta\underline{q}(t_1) = \delta\underline{q}(t_2) = 0$ ergibt sich

$$\delta S[q(t)] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt\; L(\underline{q},\dot{\underline{q}},t) = \int_{t_1}^{t_2} dt\; \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i + \ldots =$$

$$\sum_{i=1}^{f}\int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)}_{\substack{\text{Null, da } \delta q_i(t_1)=\delta q_i(t_2)=0 \\ \text{(nach Inetrgation über t)}}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i \right] = \sum_{i=1}^{f}\int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right]\delta q_i .$$

Postulieren wir

$$\delta S[q(t)] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt\; L(\underline{q},\dot{\underline{q}},t) = 0$$ Hamilton´sches Prinzip der „kleinsten“ Wirkung (1834),

dann genügt die betrachtete Trajektorie $\underline{q}(t)$ unter der Voraussetzung, dass alle $\delta q_i(t)$ linear unabhängig (also nicht durch Nebenbedingungen eingeschränkt sind) den folgenden Bewegungsgleichungen genügen.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0\,, i=1,2,...,f \qquad \rightarrow \text{Lagrange-Gleichungen II. Art}$$

Die 2 f Randbedingungen $q_i(t_1)$, $q_i(t_2)$ sind äquivalent zu 2 f Anfangsbedingungen $q_i(t_1)$, $\dot{q}_i(t_1)$.

Damit haben wir die Lagrange-Gleichungen nicht durch Übergang zu krummlinigen Koordinaten aus der NBG, sondern als Folge eines neuen Postulats zur Bestimmung der Bahnkurven, dem Hamilton´schen Variationsprinzip, abgeleitet.

<u>Beachte:</u> Angenommen, zwei Lagrange-Funktionen L und L´ unterscheiden sich lediglich durch die totale zeitliche Ableitung einer Funktion der verallgemeinerten Koordinaten und der Zeit $L'(\underline{q},\dot{\underline{q}},t)=L(\underline{q},\dot{\underline{q}},t)+\frac{d}{dt}F(\underline{q},t)$.

Dann ist

$$S'[\underline{q}(t)]=\int_{t_1}^{t_2}dt\ L'(\underline{q},\dot{\underline{q}},t)=\int_{t_1}^{t_2}dt\ L(\underline{q},\dot{\underline{q}},t)+\int_{t_1}^{t_2}dt\ \frac{d}{dt}F(\underline{q},t)=S[\underline{q}(t)]+F(q_2,t_2)-F(q_1,t_1)\ .$$

Der Zusatzterm $F(q_2,t_2)-F(q_1,t_1)$ verschwindet bei Variation mit $\delta\underline{q}(t_1)=\delta\underline{q}(t_2)=0$, d.h. aus $\delta S[\underline{q}(t)]=0$ folgt $\delta S'[\underline{q}(t)]=0$ und umgekehrt. Die auf L und L' basierenden Bewegungsgleichungen sind damit identisch, d.h. die Lagrange-Gleichungen sind invariant gegenüber Transformationen $L\rightarrow L'=L+\frac{d}{dt}F(\underline{q},t)$ mit beliebigen nicht von den verallgemeinerten Geschwindigkeiten abhängenden Funktionen F.

Diese Invarianz lässt sich bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen ausnutzen (siehe L^2), darüber hinaus ist sie von fundamentaler Bedeutung (siehe unten).

- Freies Teilchen: $L=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)=\frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2$

Galilei-Invarianz: $\dot{\underline{r}}\rightarrow\dot{\underline{r}}'=\dot{\underline{r}}+\underline{v}$ ($v\rightarrow$ konstante Relativgeschwindigkeit)

$$L' = \frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2 + m\dot{\underline{r}}\,\underline{v} + \frac{m}{2}v^2 = L + \frac{d}{dt}(m\dot{\underline{r}}\,\underline{v})$$

L ist eine mathematische Hilfsgröße (ähnlich den elektrodynamischen Potenzialen), keine physikalische Größe im Sinne einer Messgröße. Oft ist L die einfachste, mit den Symmetrien des Problems/Systems verträgliche Funktion der verallgemeinerten Koordinaten (die ihrerseits mit allen Zwangbedingungen vereinbar sein sollen) und Geschwindigkeiten.

2.4 Integrale der Bewegung in der Lagrange-Mechanik

Wir suchen Größen der Form $R\left(\underline{q}(t), \dot{\underline{q}}(t), t\right) = \text{const}$, sie erleichtern die Integration der Bewegungsgleichungen …

Dazu definieren wir zwei neue Begriffe. Die verallgemeinerte Koordinate q_k heisst zyklisch $\rightarrow$ zyklische Variable, wenn die Lagrange-Funktion L nicht von q_k abhängt: Also ist q_k zyklisch, wenn $\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0.$ Wir nennen $p_k := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0$ den zu einer zyklischen Koordinaten q_k kanonisch konjugierten Impuls. Dann haben wir folgenden Satz: Ist q_k zyklisch, dann ist p_k Integral der Bewegung.

Beweis: Aus $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$ folgt bei $\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$ sofort $\frac{d}{dt}p_k = 0$ also $p_k = \text{const}$

$\rightarrow$ Jede zyklische Koordinate impliziert eine Erhaltungsgröße.

- Freies Teilchen (U = 0): $L = \frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2$ unabhängig von $\underline{r}$, Also ist $\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}} = m\dot{\underline{r}} = \underline{p} = \text{const}$

$\rightarrow$ Impulserhaltung.

- Bewegung im Zentralfeld (U = U(r)): $L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2\right) - U(r)$

φ zyklisch, $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,\ p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi} = \text{const}$ $\rightarrow$ Drehimpulserhaltung

- **Sonderfall Energieerhaltung**

Wir betrachten den Ausdruck $\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L$.

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L\right) = \sum_{k=1}^{f}\left[\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)}_{\frac{\partial L}{\partial q_k}} \dot{q}_k + \underline{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k - \underline{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k}\right] - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

$\rightarrow$ wenn L nicht explizit zeitabhängig, dann ist $\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L$ Integral der Bewegung.

Wir werden nun zeigen, dass die Größe $\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L$ die Energie des mechanischen Systems darstellt. Dazu nehmen wir (der Einfachheit halber) an, dass die Transformation vom kartesischen auf verallgemeinerte Koordinaten $x_n = x_n(\underline{q})$ nicht explizit von der Zeit abhängt und die potenzielle Energie nicht von $\dot{q}$ abhängt. Wir haben

$$\frac{dx_n}{dt} = \dot{x}_n = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial x_n}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

also

$$T(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) = \sum_{n=1}^{3N} \frac{m_n}{2} \sum_{i,j=1}^{f} \frac{\partial x_n}{\partial q_i} \frac{\partial x_n}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$$\rightarrow \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = \sum_{n=1}^{3N} \frac{m_n}{2} \sum_{k,j=1}^{f} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \frac{\partial x_n}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_k + \sum_{n=1}^{3N} \frac{m_n}{2} \sum_{k,i=1}^{f} \frac{\partial x_n}{\partial q_i} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_k = 2T.$$

Unter der Annahme $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} = 0$ folgt wegen L = T - U

$$\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - (T-U) = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - T + U = 2T - T + U = T + U$$

$$\rightarrow \underline{E := T(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) + U(\underline{q}) = \text{const}} \ \underline{\text{wenn}\ \frac{\partial L}{\partial t} = 0}.$$