2.5 "Rezept" zur Lösung von Bewegungsproblemen mit Hilfe der Lagrange-Gleichungen II. Art. Beispiele

1. Wähle geeignete (→ Zwangbedingungen, Symmetrie) verallgemeinerte Koordinaten q = (q_1, q_2, ... , q_f)

$$\underline{x_n = x_n(\underline{q}, t)}$$

2. Drücke die kinetische und die potenzielle Energie durch $\underline{q}$ und $\underline{\dot{q}}$ aus und bestimme die

Lagrange-Funktion $\underline{L(\underline{q},\underline{\dot{q}},t) = T(\underline{q},\underline{\dot{q}},t) - U(\underline{q},t)}$

Enthält $L(\underline{q},\underline{\dot{q}},t)$ zyklische Koordinaten oder Terme der Form $\frac{d}{dt}F(\underline{q},t)$?

3. Leite die Bewegungsgleichung $\underline{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0}$, i = 1, … , f ab.

4. Löse die Bewegungsgleichung (unter Berücksichtigung der Integrale der Bewegung), bestimme die Integrationskonstanten und diskutiere die Lösung.

■ (nichtrelativistische)Bewegung eines geladenen Teilchens (→ m, q) im elektromagnetischen Feld

1. Wir wählen $\underline{r}(t)$ und $\underline{\dot{r}}(t)$, da keine Zwangbedingungen/Bewegungsbeschränkungen oder Symmetrien erkennbar

2. Behauptung: $$L(\underline{r},\underline{\dot{r}},t) = \frac{m}{2}\underline{\dot{r}}^2 - q\,\phi(\underline{r},t) + q\,\underline{\dot{r}}\cdot\underline{A}(\underline{r},t)$$

Einschub: Maxwell´sche Gleichungen des elektromagnetischen Feldes

$$\operatorname{div}\underline{B}(\underline{r},t) = 0 \qquad \operatorname{div}\underline{D}(\underline{r},t) = \rho(\underline{r},t) \qquad \underline{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\underline{E}$$

$$\operatorname{rot}\underline{E}(\underline{r},t) = -\frac{\partial\underline{B}(\underline{r},t)}{\partial t} \qquad \operatorname{rot}\underline{H}(\underline{r},t) = \underline{j}(\underline{r},t) + \frac{\partial\underline{D}(\underline{r},t)}{\partial t} \qquad \underline{B} = \mu_0\mu_r\underline{H}$$

Die beiden linken Gleichungen enthalten weder die Ladungsdichte (Quellen des elektrischen Feldes), noch die Stromdichte (Quelle des magnetischen Feldes). Die erste bedeutet, dass es keine magnetischen Ladungen gibt. Sie kann durch den Lösungsansatz

rot $\underline{A}(\underline{r},t) = \underline{B}(\underline{r},t)$ $\quad\rightarrow\quad$ Definition des Vektorpotenzials $\underline{A}(\underline{r},t)$

identisch erfüllt werden. Aus der zweiten Gleichung, dem Faraday´schen Induktionsgesetz folgt dann

$$0 = \operatorname{rot}\underline{E}(\underline{r},t) + \frac{\partial\underline{B}(\underline{r},t)}{\partial t} = \operatorname{rot}\left(\underline{E}(\underline{r},t) + \frac{\partial\underline{A}(\underline{r},t)}{\partial t}\right).$$

Da sich ein wirbelfreies Feld als Gradient eines skalaren Feldes darstellen lässt, kann diese Maxwell´sche Gleichung durch den Ansatz

$$\underline{E}(\underline{r},t) + \frac{\partial\underline{A}(\underline{r},t)}{\partial t} = -\operatorname{grad}\phi(\underline{r},t) \qquad \rightarrow \text{ Definition des skalaren Potentials } \phi(\underline{r},t)$$

erfüllt werden.

<u>Ableitung der Bewegungsgleichung</u> (keine zyklischen Variablen oder $\frac{dF(\underline{r},t)}{dt}$ Anteile)

komponentenweise: $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + qA_x$, $\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} + q\frac{dA_x}{dt}$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -q\frac{\partial\phi}{\partial x} + q\left(\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \overset{\Downarrow}{=}$$

Addiere "nahrhafte Null" $\quad 0 = \dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z} - \dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y} - \dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z}$

$$\overset{\Downarrow}{=} -q\frac{\partial \phi}{\partial x} + q\left(\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z}\right) - q\left(\dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y} - \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x}\right) - q\left(\dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z} - \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \overset{\Downarrow\Downarrow}{=}$$

Nutze

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + (\underline{\dot{r}}\cdot\underline{\nabla})A_x \quad \text{d.h.} \; -\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{dA_x}{dt} = (\underline{\dot{r}}\cdot\underline{\nabla})A_x$$

$$\overset{\Downarrow\Downarrow}{=} -q\frac{\partial \phi}{\partial x} + q(\underline{\dot{r}}\cdot\underline{\nabla})A_x + \left[\underline{\dot{r}}\times\underbrace{(\underline{\nabla}\times\underline{A})}_{\mathrm{rot}\,\underline{A}=\underline{B}}\right]_x = -q\frac{\partial \phi}{\partial x} + q\left(\frac{dA_x}{dt} - \frac{\partial A_x}{\partial t}\right) + q\,(\underline{\dot{r}}\times\underline{B})_x$$

Aus $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$ folgt

$$m\ddot{x} + \underline{q\frac{dA_x}{dt}} = q\left(\underbrace{-\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}}_{E_x \text{ wegen } E = -\mathrm{grad}\phi - \frac{\partial A}{\partial t}} + \underline{\frac{dA_x}{dt}} + (\underline{\dot{r}}\times\underline{B})_x\right) = q(\underline{E} + \underline{\dot{r}}\times\underline{B})_x \; .$$

Analoge Vorgehensweise für die y- und die z-Komponente führt schließlich auf

$\underline{m\,\underline{\ddot{r}} = q(\underline{E} + \underline{\dot{r}}\times\underline{B})}$ $\quad\rightarrow\quad$ Lorentz-Kraft

Wir erhalten also die richtige Bewegungsgleichung, d.h. wir sind von der richtigen Lagrange-Funktion ausgegangen.

Beachte: Für den verallgemeinerten Impuls finden wir $\frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{r}}} =: \underline{p} = m\underline{\dot{r}} + q\underline{A}$, wobei der Term $q\,\underline{A}$ den Impulsübertrag vom elektromagnetischen Feld auf das geladene Teilchen beschreibt.

Für die Energie ergibt sich dann

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}} \cdot \dot{\underline{r}} - L = (m\,\dot{\underline{r}} + q\,\underline{A}) \cdot \dot{\underline{r}} - \left[\frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2 - q\,\phi(\underline{r},t) + q\,\dot{\underline{r}} \cdot \underline{A}(\underline{r},t) \right] = \frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2 + q\,\phi(\underline{r},t) =: E\,.$$

$q\,\phi(\underline{r},t)$ ist die potenzielle Energie des Teilchens in Übereinstimmung mit der Tatsache, dass das Magnetfeld keine Arbeit am Teilchen verrichtet. Der Zusatzterm $q\,\underline{A}$ im Teilchenimpuls muss berücksichtigt werden, wenn die Lagrange-Funktion nach der "Regel" $L = T - U$ bestimmt wird.

- **Eichtransformation und Eichinvarianz**

Die Transformation

$$\underline{A}(\underline{r},t) \rightarrow \underline{A}'(\underline{r},t) = \underline{A}(\underline{r},t) + \operatorname{grad}\chi(\underline{r},t), \qquad \phi(\underline{r},t) \rightarrow \phi'(\underline{r},t) = \phi(\underline{r},t) - \frac{\partial \chi(\underline{r},t)}{\partial t}$$

wobei $\chi(\underline{r},t)$ beliebig, heißt Eichtransformation. Unter der Eichtransformation ändern sich die Felder $\underline{E}$ und $\underline{B}$ nicht, wie man leicht überprüfen kann. Diese Invarianz der Felder heißt Eichinvarianz.

Unter der Eichtransformation $\underline{A}' = \underline{A} + \operatorname{grad}\chi,\ \phi' = \phi - \partial\chi/\partial t$ transformiert sich die Lagrange-Funktion $L(\underline{r},\dot{\underline{r}},t) = \frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2 - q\,\phi(\underline{r},t) + q\,\dot{\underline{r}} \cdot \underline{A}(\underline{r},t)$ wie folgt:

$$L'(\underline{r},\dot{\underline{r}},t) = \frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2 - q\left(\phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}\right) + q\,\dot{\underline{r}} \cdot \left(\underline{A} + \operatorname{grad}\chi\right) = \underbrace{\frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2 - q\,\phi + q\,\dot{\underline{r}} \cdot \underline{A}}_{L(\underline{r},\dot{\underline{r}},t)} + q\underbrace{\left(\frac{\partial\chi}{\partial t} + \operatorname{grad}\chi \cdot \dot{\underline{r}}\right)}_{\frac{d\chi(\underline{r},t)}{dt}}$$

also $$L'(\underline{r},\dot{\underline{r}},t) = L(\underline{r},\dot{\underline{r}},t) + \frac{d\chi(\underline{r},t)}{dt}$$

$\rightarrow$ die transformierte Lagrange-Funktion enthält einen einzigen Zusatzterm, nämlich die vollständige Ableitung nach der Zeit der Funktion $\chi(\underline{r}, t)$. Dieser Term spielt keine Rolle bei der Ableitung der Bewegungsgleichung: $m\,\ddot{\underline{r}} = q\,(\underline{E} + \dot{\underline{r}} \times \underline{B})$ ist eichinvariant.

■ Bewegung eines <u>relativistischen</u> Teilchens ($\rightarrow$ <u>Ruhe</u>masse m_0, Ladung q) im elektromagnetischen Feld (Übungsblatt).

$$L(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) = -\sqrt{1 - \frac{\dot{\underline{r}}^2}{c^2}}\, m_0\, c^2 - q\,\phi(\underline{r}, t) + q\,\dot{\underline{r}} \cdot \underline{A}(\underline{r}, t)$$

Im nichtrelativistischen Grenzfall $\frac{\dot{r}}{c} << 1$ folgt die Lagrange-Funktion für die nichtrelativistische Bewegung im elektromagnetischen Feld

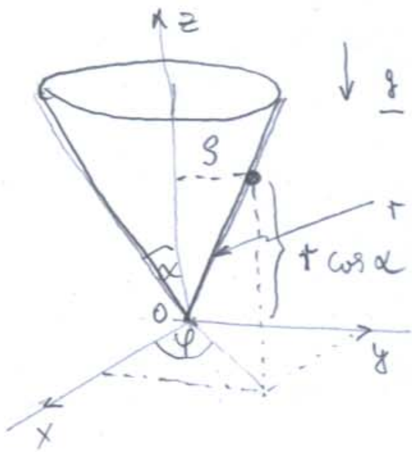
$$L(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) = \frac{m}{2} \dot{\underline{r}}^2 - q\,\phi(\underline{r}, t) + q\,\dot{\underline{r}} \cdot A(\underline{r}, t)\,.$$

Bei der Ableitung der Bewegungsgleichung ergibt sich völlig analog zur Vorgehensweise im nichtrelativistischen Fall das erwartete Resultat

$$\underline{\frac{d}{dt}(m\,\dot{\underline{r}}) = q\,(\underline{E} + \dot{\underline{r}} \times \underline{B})} \quad \text{mit} \quad m := \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\underline{r}}^2}{c^2}}} \quad \rightarrow \text{relativistische Masse}$$

Die Energie des Teilchens ist $\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}} \cdot \dot{\underline{r}} - L = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\underline{r}}^2}{c^2}}} c^2 + q\,\phi = m\,c^2 + q\,\phi := E\,.$

- Auf welcher Bahnkurve bewegt sich ein MP (m) im Schwerefeld der Erde (g) reibungsfrei auf der Innenseite eines Kreiskegels?



1. Wahl der verallgemeinerten Koordinaten

Die z-Achse sei die Symmetrieachse des Kegels. Wir wählen

$q_1 = \varphi$

um die Rotationssymmetrie ausnutzen zu können und

$q_2 = r$

zur eindeutigen Festlegung der Lage des MP auf der Kegeloberfläche.
Wir haben 2 Freiheitsgrade, da die Bewegung wegen

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \text{ und } \operatorname{tg}\alpha = \frac{\rho}{z}, \text{ also } g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 \operatorname{tg}^2\alpha = 0$$

auf die Kegeloberfläche eingeschränkt ist ($f = 3N - R = 3 - 1 = 2$). Der Öffnungswinkel des Kegels ist 2α.
Die Transformationsformeln von den kartesischen Koordinaten x(t), y(t), z(t) auf die verallgemeinerten Koordinaten φ(t) und r(t) lauten

$$x = x(r,\varphi) = r\sin\alpha\cos\varphi,\ \ y = y(r,\varphi) = r\sin\alpha\sin\varphi,\ \ z = z(r) = r\cos\alpha\,.$$

Wie in Lagrange II zu fordern, wird die Zwangbedingung identisch erfüllt

$$x = x(r,\varphi) = r^2\sin^2\alpha\cos^2\varphi + r^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi - r^2\cos^2\alpha\ \operatorname{tg}^2\alpha = 0\,.$$

2. Kinetische und potenzielle Energie als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten und Geschwindigkeiten, Lagrange-Funktion, zyklische Variable, Terme d/dt F(q,t)

kinetische Energie: $T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \ldots = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha)$,

denn $\dot{x} = \dot{r}\sin\alpha\cos\varphi - r\sin\alpha\,\dot{\varphi}\sin\varphi,\ \dot{y} = \ldots$ usw.

potenzielle Energie: $U = mg\,z = mg\,r\cos\alpha$

Lagrange-Funktion: $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\alpha) - mg\,r\cos\alpha = L(r,\dot{r},\dot{\varphi})$

φ ist zyklische Koordinate, also ist

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = m\,r^2\,\dot{\varphi}\,\sin^2\alpha =: L_z = \text{const} \quad \text{(H1)}$$

Integral der Bewegung $\rightarrow$ Drehimpulserhaltung. Grund: Rotationssymmetrie - Potenzial und Zwangbedingung sind rotationsinvariant.

L ist nicht explizit zeitabhängig $\rightarrow$ Energieerhaltung

$$T + U = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\alpha) + mg\,r\cos\alpha =: E = \text{const} \quad \text{(H2)}$$

3. Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0 \;\rightarrow\; \frac{d}{dt}(m\,r^2\,\dot{\varphi}\,\sin^2\alpha) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \;\rightarrow\; m\,\ddot{r} - m\,r\,\dot{\varphi}^2\,\sin^2\alpha + mg\cos\alpha = 0 \quad \text{(H3)}$$

4. Lösung der Lagrange-Gleichungen unter Berücksichtigung der Integrale der Bewegung, Bestimmung der Integrationskonstanten, Diskussion der Lösung

Anstatt die DG 2. Ordnung (H3) zu integrieren, verwenden wir (H1) in (H2), da diese Gleichungen nur Ableitungen erster Ordnung der gesuchten Funktionen r(t) und φ(t) enthalten. Aus $E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2\frac{L_z}{(m\,r^2\sin^2\alpha)^2}\sin^2\alpha + mg\,r\cos\alpha$ folgt

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + U_{eff}(r) \quad (H4) \qquad \text{mit} \qquad U_{eff}(r) := \frac{L_z^2}{2m\sin^2\alpha}\frac{1}{r^2} + mg\cos\alpha\, r \ .$$

(H4) beschreibt die eindimensionale Bewegung eines MP im effektiven Potenzial $U_{eff}(r)$, dessen erster Term vom Drehimpuls abhängt (→ Fliehkraftbarriere). Aus (H4) lässt sich die Umkehrfunktion t(r) von r(t) bestimmen

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U_{eff}(r)\right]} \quad \rightarrow \quad t = t_0 + \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{r_0}^{r}\frac{dr'}{\sqrt{\left[E - U_{eff}(r)\right]}} \ .$$

Das ist wieder ein elliptisches Integral, wir können es "zur Not" numerisch auswerten. Aus (H1) finden wir schließlich $\varphi(t)$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L_z}{mr^2\sin^2\alpha} \quad \rightarrow \quad \varphi(t) = \varphi_0 + \frac{L_z}{m\sin^2\alpha}\int_{t_0}^{t}\frac{dt'}{r^2(t')} \ .$$

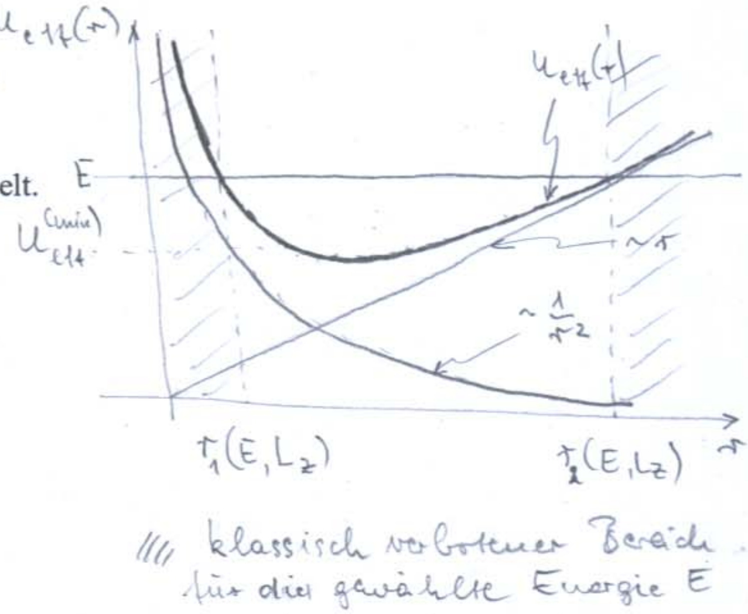
Die Integrationskonstanten ergeben sich aus vier Anfangsbedingungen $r(t_0) = r_0$, $\varphi(t_0) = \varphi_0$, $\dot{r}(t_0) = v_0$ und $\dot{\varphi}(t_0) = \omega_0$ oder aus $r(t_0) = r_0$, $\varphi(t_0) = \varphi_0$, E und L_z

Diskussion der Lösung, qualitative Beschreibung der Bahnkurven

Aus der effektiven potenziellen Energie folgt, dass es sich um eine periodische Bewegung zwischen zwei Umkehrpunkten r_1 und r_2 handelt. Diese sind die Nullstellen der Gleichung

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 = E - U_{eff}(r) = 0$$

und hängen dadurch von E und L_z ab. Der klassisch erlaubte Bereich der Bewegung



$r_1 < r(t) < r_2$ ist durch $\frac{m}{2}\dot{r}^2 = E - U_{eff}(r) \geq 0$

gegeben. In den Umkehrpunkten der Bewegung ist die Geschwindigkeit des MP verschieden von Null, da $\dot{\varphi} = \frac{L_z}{m \sin^2\alpha \, r_{1/2}^2} \neq 0$, vorausgesetzt $L_z \neq 0$.

Fazit: Eine kleine Kugel gleitet auf einer wellenförmigen, im allgemeinen nicht geschlossenen Bahn im Trichter auf und ab, die durch die Kreise $z_1 = r_1 \cos\alpha$ und $z_2 = r_2 \cos\alpha$ von unten bzw. oben begrenzt ist. Fällt die Energie E unter den Wert des Minimums der effektiven potenziellen Energie

$$U_{\mathrm{eff}}^{\min} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}} a^{1/3} b^{2/3} \sim L_z^{2/3}, \; a := \frac{L_z^2}{2m \sin^2\alpha}, \; b := mg\cos\alpha \;,$$

ist keine Bewegung möglich. Für $L_z = 0$ rollt die Kugel in die Spitze des Trichters; für $L_z \neq 0$ existieren immer zwei Umkehrpunkte und die Spitze des Trichters wird nicht erreicht.
All diese Schlussfolgerungen gelten nur, wenn Reibung und Rotationsenergie der Kugel vernachlässigt werden!