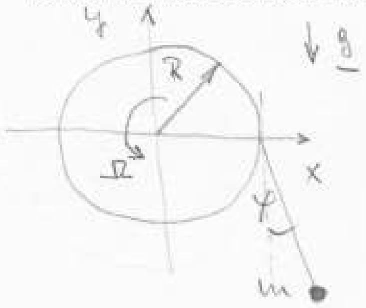
2.6 Bewegungsbeschränkungen (BB), Zwangsbedingungen (ZB) und Zwangskräfte (ZK). Lagrange-Gleichungen I. Art

- Eine kleine Kugel rollt reibungsfrei im Innern eines Trichters (s. Kap. 2.5)

- Pendel mit rotierendem Aufhängepunkt

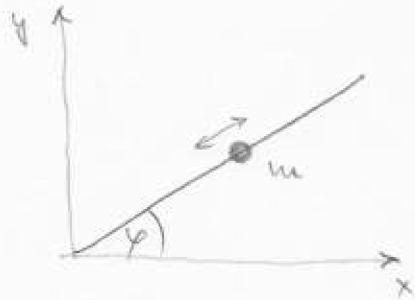


$$x = R\cos\Omega t + l\sin\varphi$$
$$y = R\sin\Omega t - l\cos\varphi$$
$$z = 0$$

Zwangbedingung

$$g(x,y,t) = (x - R\cos\Omega t)^2 + (y - R\sin\Omega t)^2 - l^2 = 0$$

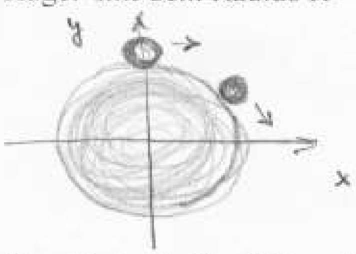
- Ein Massepunkt gleitet reibungsfrei auf einer rotierenden Stange



$$\frac{y}{x} = \mathrm{tg}\varphi,\quad \varphi = \omega t$$

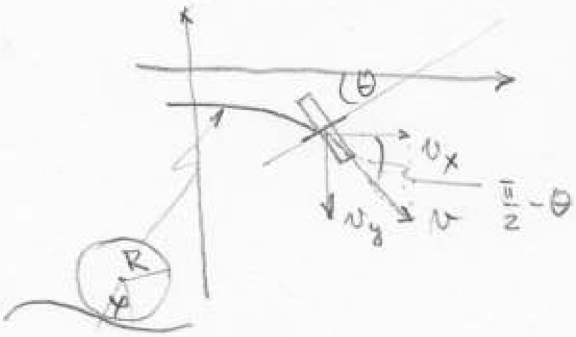
Zwangbedingung: $g(x,y,t) = \mathrm{arctg}\frac{y}{x} - \omega t = 0$

- Eine kleine Kugel rollt im Schwerefeld reibungsfrei vom oberen Pol einer größeren Kugel mit dem Radius R



Zwangbedingung: $x^2 + y^2 - R^2 \geq 0$

- Eine Kreisscheibe (Münze) rollt reibungsfrei[1)] und stets senkrecht stehend[2)] in der x-y-Ebene



Dann gilt
$$v_x = \dot{x} = v\sin\theta$$
$$v_y = \dot{y} = -v\cos\theta$$

Zwangbedingung:
$$dx - R\sin\theta\ d\varphi = 0$$
$$dy + R\cos\theta\ d\varphi = 0$$

Klassifikation der Zwangbedingungen

1. ZB der Form $g_\alpha(\underline{r},t) = 0,\ \alpha = 1,...,R$ $\rightarrow$ **holonome** (integrable) ZB

holonome ZB, die explizit zeitabhängig $\rightarrow$ **rheonom** (2. und 3. Beispiel oben)

holonome ZB, die nicht explizit zeitabhängig $\rightarrow$ **skleronom** (1. Beispiel oben).

2. Nichtholonome ZB enthalten Geschwindigkeiten oder sind zwischen Differentialen (5. Beispiel oben) oder unter Verwendung von Ungleichungen (4. Beispiel oben) formuliert.

Um die Problematik der Bestimmung der Bahnkurve bei Bewegung unter Zwangbedingungen zu verdeutlichen, betrachten wir zunächst der Einfachheit halber die Bewegung eines MP unter Einwirkung der (eingeprägten) Kraft $\underline{F}$, wenn eine holonome ZB vorliegt. Auch wenn diese ZB formuliert werden kann, ist die entsprechende ZK $\underline{Z}$ oft nicht explizit gegeben, da sie i.a. von der tatsächlichen, also noch unbekannten Bahnkurve abhängig ist. Die rechte Seite der NBWG

$$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F} + \underline{Z}$$

ist somit nicht vollständig bekannt und das in Kap. 1.4.2 beschriebene "Rezept" zur Lösung von Bewegungsproblemen im Rahmen der Newton´schen Mechanik nicht unmittelbar anwendbar.

Um dieses Problem zu lösen, gibt es folgende Möglichkeiten:

A: Wir eliminieren $\underline{Z}$ durch Einführung verallgemeinerter Koordinaten, $\underline{r} = \underline{r}(\underline{q},t)$, welche die ZB identisch erfüllen und bestimmen die Bahnkurve $\underline{r}(t)$ über $\underline{q}(t)$. Das ist die Vorgehensweise im Lagrange-II-Formalismus. Dieser ist sehr elegant, aber die ZK können nicht berechnet werden.

B: Wir nutzen aus, dass holonome ZB die Bewegung des MP auf die Fläche $g(\underline{r}, t) = 0$ im R^3 einschränken, ohne die Bewegung innerhalb dieser Fläche zu beeinflussen. Demzufolge steht $\underline{Z} \perp$ auf der Fläche $g(\underline{r}, t) = 0$, besitzt also keine Komponenten "in Richtung" dieser Fläche. Das bedeutet

$$g(\underline{r}, t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{Z} \parallel \operatorname{grad} g(\underline{r}, t) \quad \text{also} \quad g(\underline{r}, t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{Z} = \lambda(t) \operatorname{grad} g(\underline{r}, t) \ .$$

Die NBWG für die Bewegung eines MP bei einer holonomen ZB lautet somit

$$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F} + \underline{Z} = \underline{F} + \lambda(t) \operatorname{grad} g(\underline{r}, t) \ .$$

Verallgemeinert auf ein MPS aus N MP und R holonome ZB haben wir dann 3N + R Gleichungen

$$\begin{aligned} &m_n \ddot{r}_n = F_n(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) + \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha(t) \frac{\partial g_\alpha(\underline{r}, t)}{\partial r_n}, \quad g_\alpha(\underline{r}, t) = 0, \\ &\underline{r} = (r_1, \ldots, r_{3N}) \quad \alpha = 1, \ldots, R \ , \quad n = 1, \ldots, 3N \end{aligned} \qquad \text{(H1)}$$

für 3N unbekannte Funktionen $r_n(t)$ und R unbekannte Parameter $\lambda_\alpha(t)$.

Um die $\lambda_\alpha(t)$ zu eliminieren, berechnen wir $\dfrac{d^2 g_\alpha}{dt^2}$:

$$0 = \frac{d^2 g_\alpha}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial g_\alpha}{\partial r_n} \dot{r}_n + \frac{\partial g_\alpha}{\partial t}\right) \quad \text{bzw.} \quad \sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial g_\alpha}{\partial r_n} \ddot{r}_n = G_\alpha(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) \ .$$

Die zweiten Ableitungen $\ddot{r}_n$ treten lediglich linear auf, da die holonomen ZB $g_\alpha(\underline{r}, t) = 0, \ \alpha = 1, \ldots, R$ unabhängig von $\dot{\underline{r}}$ sind. Die Funktionen G_α auf der rechten Seite subsummieren alle restlichen, also nicht $\ddot{r}_n$ enthaltenden Terme. Setzen wir $\ddot{r}_n$ aus der BWG ein, ergibt sich ein lineares inhomogenes Gleichungssystem, aus dem die noch unbekannten Größen $\lambda_\alpha(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t)$ ermittelt werden können

$$G_\alpha(\underline{r},\dot{\underline{r}},t)=\sum_{n=1}^{3N}\frac{\partial g_\alpha}{\partial r_n}\ddot{r}_n=\sum_{n=1}^{3N}\frac{\partial g_\alpha}{\partial r_n}\frac{1}{m_n}\left[F_n(\underline{r},\dot{\underline{r}},t)+\sum_{\beta=1}^{R}\lambda_\beta(t)\frac{\partial g_\beta(\underline{r},t)}{\partial r_n}\right].$$

Nun ist die rechte Seite der BWG bekannt und die Bahnkurve $\underline{r}(t)$ aus

$$m_n\ddot{r}_n=F_n(\underline{r},\dot{\underline{r}},t)+\sum_{\alpha=1}^{R}\lambda_\alpha(\underline{r},\dot{\underline{r}},t)\frac{\partial g_\alpha(\underline{r},t)}{\partial r_n} \qquad \text{(H2)}$$

bestimmbar. Für die Zwangskräfte/Komponenten der Zwangskraft folgt

$$Z_n=\sum_{\alpha=1}^{R}\lambda_\alpha(\underline{r},\dot{\underline{r}},t)\frac{\partial g_\alpha(\underline{r},t)}{\partial r_n} \quad \text{(H3)},$$

wobei $\underline{r}(t)$ die aus (H2) ermittelte Lösung ist.

- **Zusammenhang mit Lagrange II**

Wählen wir $f=3N-R$ verallgemeinerte Koordinaten $\underline{q}$ derart, dass $g_\alpha(\underline{r}(\underline{q},t),t)\equiv 0$, dann ist

$$\frac{\partial g_\alpha}{\partial q_k}=0 \qquad \text{also} \qquad \sum_{n=1}^{3N}\frac{\partial g_\alpha}{\partial r_n}\frac{\partial r_n}{\partial q_k}=0,\ k=1,\dots,f\ .$$

Mit dieser Beziehung lassen sich die Zwangskräfte aus der Bewegungsgleichung (H1) eliminieren, indem man sie komponentenweise mit $\frac{\partial r_n}{\partial q_k}$ multipliziert und über n summiert

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{3N}m_n\ddot{r}_n\frac{\partial r_n}{\partial q_k}=\sum_{n=1}^{3N}F_n\frac{\partial r_n}{\partial q_k}}_{\substack{\text{das führt auf Lagrange-Gleichungen II Art}\\ \text{(vgl. etwa (H2) Kap. 1.3 mit } \frac{\partial r_n}{\partial q_k}=(e_k)_n)}}+\sum_{\alpha=1}^{R}\lambda_\alpha(t)\underbrace{\sum_{n=1}^{3N}\frac{\partial g_\alpha}{\partial r_n}\frac{\partial r_n}{\partial q_k}}_{\text{Null}}\ .$$

- **Rezept" zur Lösung von Bewegungsproblemen mit Lagrange I (im Fall holonomer Zwangbedingungen)**

(i) Wähle die Koordinaten und formuliere die ZB

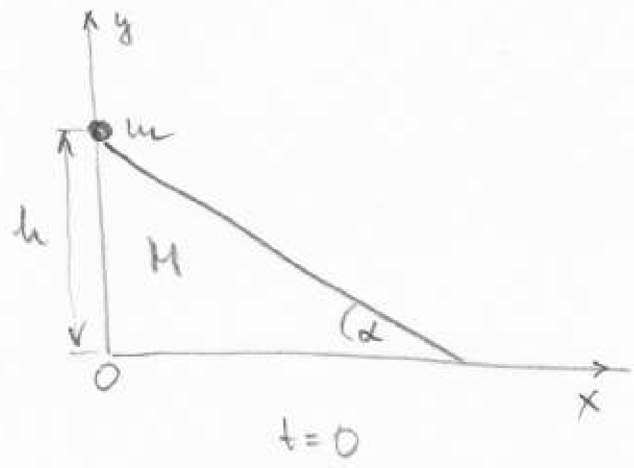
(ii) Bestimme die Lagrange-Funktion und stelle die Lagrange-Gleichungen I. Art unter Berücksichtigung des Ansatzes $Z_n = \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha(t) \frac{\partial g_\alpha(\underline{r}, t)}{\partial r_n}$ auf.

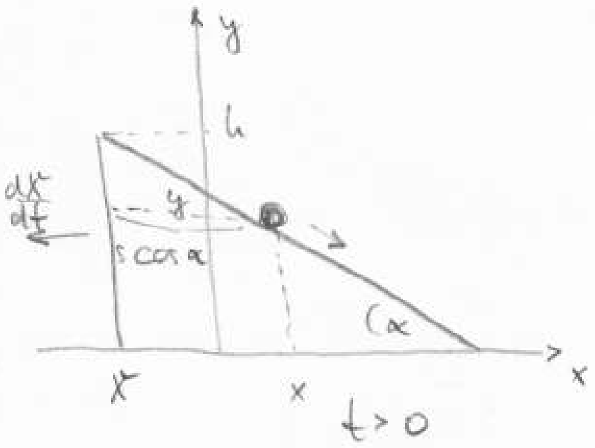
(iii) Bestimme die Abhängigkeit von $\lambda_\alpha(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t)$, indem die ZB zweifach nach t abgeleitet werden und die $\ddot{\underline{r}}$ mit Hilfe der Bewegungsgleichungen eliminiert werden.

(iv) $\lambda_\alpha(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t)$ in die Lagrange-Gleichungen I. Art einsetzen und aus den Anfangsbedingungen die Integrationskonstanten ermitteln.

(v) Die Komponenten der Zwangskraft aus $Z_n = \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) \frac{\partial g_\alpha(\underline{r}, t)}{\partial r_n}$ berechnen und die Lösung diskutieren.

- Gleitende Kugel auf gleitendem Keil (reibungsfrei) **A: Lagrange I**





Koordinaten: Kugel $x(t), y(t)$ Keil $X(t)$

Anfangsbedingungen zu $t = t_0 = 0$: $x(0) = X(0) = 0$, $y(0) = h$, $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{X}(0) = 0$

Zwangbedingung: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{h-y}{x-X}$ also $g(x,y,X) = y + (x-X)\operatorname{tg}\alpha - h = 0$

Lagrange-Funktion: $L = \dfrac{M}{2}\dot{X}^2 + \dfrac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - mg\,y$

$$\tilde{L} = \frac{M}{2}\dot{X}^2 + \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - mg\,y + \lambda\,[\,y + (x-X)\operatorname{tg}\alpha - h\,]$$

Lagrange-Gleichungen I. Art

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial r_i} = \lambda(t)\,\frac{\partial g}{\partial r_i} \qquad \text{oder} \qquad m\,\ddot{\underline{r}} = \underline{F} + \lambda(t)\,\operatorname{grad} g(\underline{r}, t)$$

$$\left.\begin{aligned} r_1 = x:&\quad m\ddot{x} = \lambda(t)\operatorname{tg}\alpha \\ r_2 = y:&\quad m\ddot{y} = \lambda(t) - mg \\ r_3 = X:&\quad M\ddot{X} = -\lambda(t)\operatorname{tg}\alpha \end{aligned}\right\}(H)$$

ZB zweifach nach t abgeleitet: $\dfrac{d^2g}{dt^2} = 0 \rightarrow \ddot{y} + (\ddot{x} - \ddot{X})\operatorname{tg}\alpha = 0$ und $\ddot{x}, \ddot{y}$ sowie $\ddot{X}$ mit Hilfe der Lagrange-Gleichungen eliminiert ergibt

$$\lambda(t) - mg + \left(\lambda(t)\operatorname{tg}\alpha + \frac{m}{M}\lambda(t)\operatorname{tg}\alpha\right)\operatorname{tg}\alpha = 0\,,\ \text{also} \qquad \lambda(t) = \frac{mg}{1 + \left(1 + \dfrac{m}{M}\right)\operatorname{tg}^2\alpha} = \text{const}\,,$$

d.h. in diesem einfachen Fall ist λ zeitunabhängig. Die rechten Seiten der Bewegungsgleichungen (H) sind konstant $\rightarrow$ gleichmäßig beschleunigte Bewegung. Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen ergibt sich sofort

$$x(t)=\frac{tg\alpha}{1+\left(1+\frac{m}{M}\right)tg^2\alpha}\frac{g}{2}t^2,\; y(t)=h-\left(1-\frac{1}{1+\left(1+\frac{m}{M}\right)tg^2\alpha}\right)\frac{g}{2}t^2,\; X(t)=-\frac{m}{M}\frac{tg\alpha}{1+\left(1+\frac{m}{M}\right)tg^2\alpha}\frac{g}{2}t^2.$$

Diskussion:

(i) x(t): Für $M >> m$ ist die Beschleunigung $\frac{g\,tg\alpha}{1+tg^2\alpha}=g\,tg\alpha\,\cos^2\alpha=g\sin\alpha\,\cos\alpha$. Das ist wie zu erwarten die x-Komponente der "Hangabtriebbeschleunigung" $g\sin\alpha$.

(ii) Wie weit ist der Keil gerutscht, wenn die Kugel bei y = 0 angelangt ist? Aus y = 0 folgt

$$h=\left(1+\frac{m}{M}\right)tg\alpha\frac{g}{2}t^2\;\rightarrow\frac{g}{2}t^2=\frac{h}{\left(1+\frac{m}{M}\right)tg\alpha}\;\rightarrow\;X(y=0)=-\frac{m}{M}\frac{h}{\left(1+\frac{m}{M}\right)tg\alpha}=-\frac{h\,ctg\alpha}{1+\frac{M}{m}}=:X_{max}$$

Wie zu erwarten ist $X_{max}\rightarrow 0$ für $M\rightarrow\infty$ und $X_{max}\rightarrow-\infty$ für $\alpha\rightarrow 0$.

■ Gleitende Kugel auf gleitendem Keil (reibungsfrei) B: Lagrange II

Bei der Lösung des gleichen Problems über Lagrange II wählen wir wieder die Koordinate X(t) für die Position des Keils aber um die ZB identisch erfüllen zu können die verallgemeinerte Koordinate s(t) ($\rightarrow$ den zurückgelegten Weg) anstelle von x(t) und y(t) (f = 3 – 1 = 2)

$$x=X+s\cos\alpha,\; y=h-s\sin\alpha\;,\quad g(x,y,X)=tg\alpha-\frac{h-y}{x-X}=tg\alpha-\frac{s\sin\alpha}{s\cos\alpha}\equiv 0\;.$$

Lagrange-Funktion:

$$L=\frac{M}{2}\dot{X}^2+\frac{m}{2}\left[(\dot{X}+\dot{s}\cos\alpha)^2+\dot{s}\sin^2\alpha\right]-mg(h-s\sin\alpha)=$$
$$=\frac{M+m}{2}\dot{X}^2+\frac{m}{2}\dot{s}^2+m\dot{X}\dot{s}\cos\alpha+mg\,s\sin\alpha-mg\,h$$

X ist zyklisch, d.h.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = (M+m)\dot{X} + m\underbrace{\cos\alpha\,\dot{s}}_{\dot{x}-\dot{X}} = \text{const} \overset{AB}{=} 0 \text{ bzw. } M\dot{X} + m\dot{x} = 0 \;\rightarrow\; \text{Impulserhaltung.}$$

Lagrange-Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) &= \frac{d}{dt}\left(m\dot{s} + m\cos\alpha\,\dot{X}\right) \\ \frac{\partial L}{\partial s} &= mg\sin\alpha \end{aligned}\right\} \; m\cos\alpha\,\ddot{X} + m\ddot{s} - mg\sin\alpha = 0$$

sowie die schon abgeleitete Gleichung

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}}\right) = (M+m)\ddot{X} + m\cos\alpha\,\ddot{s} = 0, \text{ aus der } m\ddot{s} = -\frac{M+m}{\cos\alpha}\ddot{X} \text{ folgt.}$$

Eingesetzt in die Gleichung für $\ddot{X}$ finden wir $m\cos\alpha\,\ddot{X} - \frac{M+m}{\cos\alpha}\ddot{X} - mg\sin\alpha = 0$ also wie bei Lagrange I

$$\ddot{X} = -\frac{m}{M}\frac{tg\alpha}{1+\left(1+\frac{m}{M}\right)tg^2\alpha}g = \text{const}$$

usw.

- **Lösung der Aufgabe auf der Basis von Energie- und Impulserhaltung**

Impulserhaltung $M\dot{X} + m\dot{x} = \text{const} \overset{AB}{=} 0$ führt unter Verwendung der AB $X(0) = x(0) = 0$ auf $\underline{X = -\frac{m}{M}x}$. Aus der ZB $y = h - (x - X)\,\text{tg}\alpha$ wird $\underline{y = h - x\left(1 + \frac{m}{M}\right)\text{tg}\alpha}$ und $\underline{\dot{y} = -\left(1 + \frac{m}{M}\right)\text{tg}\alpha\;\dot{x}}$. Damit lassen sich X, y und $\dot{y}$ im Energieerhaltungssatz

$$L = \frac{M}{2}\dot{X}^2 + \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + mg\,y = \text{const} \overset{AB}{=} mg\,h$$

eliminieren. Nach einfachen Umfomungen folgt

$$\dot{x}^2 = 2a\,x \quad \text{mit} \quad a := 2g\,\frac{\text{tg}\alpha}{1 + \left(1 + \frac{m}{M}\right)\text{tg}^2\alpha}\,.$$

Einfache Integration unter Berücksichtigung der AB ergibt wieder wie oben

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2\,, \qquad X(t) = -\frac{m}{M}\frac{a}{2}t^2 \qquad \text{und} \qquad y(t) = h - \left(1 + \frac{m}{M}\right)\text{tg}\alpha\,\frac{a}{2}t^2\,.$$

2.7 Lagrange-Gleichungen I. Art als Variationsproblem mit Nebenbedingungen

Wir leiten die Bewegungsgleichungen nun aus dem Hamilton'schen Variationsprinzip $\delta S[\underline{r}(t)] = 0$ unter Berücksichtigung von R Nebenbedingungen der Form $g_\alpha(\underline{r}, t) = 0, \ \alpha = 1,\dots,R$ ab, also ohne Verwendung der Newton'schen Bewegungsgleichung. Dabei gehen wir wie in Kap. 2.3 vor, verwenden jedoch zunächst keine verallgemeinerten Koordinaten. Für die Variation der Wirkung infolge einer Variation $\delta\underline{r}(t)$ entlang einer Trajektorie $\underline{r}(t)$ mit $\delta\underline{r}(t_1) = \delta\underline{r}(t_2) = 0$ ergibt sich

$$0 \overset{!}{=} \delta S[\underline{r}(t)] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial L}{\partial r_i}\delta r_i + \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}\delta \dot{r}_i + \ldots =$$

$$\sum_{i=1}^{3N}\int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial r_i}\delta r_i + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}\delta r_i\right)}_{\substack{\text{Null, da } \delta q_i(t_1)=\delta q_i(t_2)=0 \\ \text{(nach Integration über t)}}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}\right)\delta r_i \right] = \sum_{i=1}^{3N}\int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial r_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}\right)\right]\delta r_i .$$

In Kap. 2.3 waren die Komponenten δr_i der Variation $\delta\underline{r}$ der Bahnkurve beliebige, <u>voneinander unabhängige</u> (kleine) Größen und aus der Forderung $\delta S[\underline{r}(t)] = 0$ folgten die Lagrange-Gleichungen II. Art, da die Ausdrücke in den eckigen Klammern im letzten Ausdruck verschwinden müssen. Jetzt sind die δr_i nicht voneinander unabhängig, sondern über die Nebenbedingungen mit einander gekoppelt, da

$$g_\alpha(\underline{r} + \delta\underline{r}, t) = g_\alpha(\underline{r}, t) + \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial g_\alpha}{\partial r_i}\delta r_i + O\left((\delta r_i)^2\right), \ \text{also} \quad \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial g_\alpha}{\partial r_i}\delta r_i = 0, \ \alpha = 1,\dots,R$$

für kleine δr_i.

Ein effektives und elegantes Verfahren zur Lösung von Extremalproblemen mit Nebenbedingungen ist die Methode der unbestimmten Multiplikatoren von Lagrange. Lagrange betrachtete anstelle von $S[\underline{r}(t)]$ das Funktional

$$\tilde{S}[\underline{r}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \tilde{L}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) \quad , \quad \tilde{L}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) = L(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) + \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha(t) g_\alpha(\underline{r}, t)$$

mit den zunächst unbekannten → **Lagrange-Multiplikatoren** $\lambda_\alpha(t)$. Es folgt

$$\delta\tilde{S}[\underline{r}(t)] = \delta\int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\underline{r},\dot{\underline{r}},t) = \ldots = \sum_{i=1}^{3N}\int_{t_1}^{t_2} dt\left[\frac{\partial L}{\partial r_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}\right) + \sum_{\alpha=1}^{R}\lambda_\alpha(t)\frac{\partial g_\alpha}{\partial r_i}\right]\delta r_i = 0\,.$$

Dabei sind die Nebenbedingungen noch nicht verwendet worden, d.h. alle δr_i sind jetzt unabhängig voneinander. Es muss also

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial r_i} = \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{R}\lambda_\alpha(t)\frac{\partial g_\alpha}{\partial r_i}}_{Z_i}\,,\quad i = 1,\ldots,3N \qquad \text{(II)}$$

gelten. Die Lösungen $r_i(t;\underline{\lambda}(t))$ dieser Lagrange-Gleichungen I. Art hängen von den Lagrange-Multiplikatoren ab, die mit Hilfe der R Nebenbedingungen $g_\alpha[r_i(t;\underline{\lambda}(t)),t] = 0$ fixiert werden. Auf der rechten Seite der Gleichung stehen die Zwangskräfte/Komponenten der Zwangskraft Z_i.

FAZIT: Das Hamilton´sche Variationsprinzip führt angewendet auf Systeme mit Zwangbedingungen (Bewegungsbeschränkungen) auf Lagrange-Gleichungen I. Art. Die physikalischen Zwangbedingungen werden zu Nebenbedingungen des Variationsproblems.

- Kleine Kugel im Trichter (reibungsfrei, Rotationsenergie der Kugel vernachlässigen)

Die Bahnkurve eines MP, der sich reibungsfrei im Schwerefeld der Erde (g) reibungsfrei auf der Innenseite eines Kreiskegels bewegt, haben wir bereits in Kap. 2.5 im Rahmen von Lagrange II diskutiert. Hier soll die Lösung gemäß Lagrange I, also einschließlich der Berechnung der Zwangskräfte skizzierte werden.

Aus Symmetriegründen wählen wir Zylinderkoordinaten mit der z-Achse als Rotationsachse des Kegels $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z$. Die holonome Zwangbedingung $g(r,z) = r - \mathrm{tg}\alpha\ z = 0$ wird durch diese Koordinatenwahl nicht identisch erfüllt.

Die Lagrange-Funktion lautet in Zylinderkoordinaten

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - mg\,z = L(r, y, \dot{r}, \dot{\varphi}) .$$

Daraus finden wir leicht die Lagrange-Gleichungen I. Art

$$m\,\ddot{z} = -mg + Z_z = -mg + \lambda\frac{\partial g}{\partial z} = -mg - \lambda\,\mathrm{tg}\alpha ,$$

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = Z_r = \lambda\frac{\partial g}{\partial r} = \lambda ,$$

$$m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\,\dot{\varphi}) = Z_\varphi = \lambda\frac{\partial g}{\partial \varphi} = 0 .$$

Die Zwangbedingung, zweifach nach der Zeit abgeleitet, liefert $\ddot{r} - \mathrm{tg}\alpha\;\ddot{z} = 0$, woraus sich unter Verwendung der Ausdrücke für $\ddot{r}$ und $\ddot{z}$ folgende Beziehung für den unbekannten Parameter λ ergibt $0 = m\ddot{r} - \mathrm{tg}\alpha\; m\ddot{z} = m\,r\dot{\varphi}^2 + \lambda - \mathrm{tg}\alpha\,(-mg - \lambda\,\mathrm{tg}\alpha)$ oder

$$\lambda = -\frac{m\,r\dot{\varphi}^2 + mg\,\mathrm{tg}\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha} = \lambda(r(t), \dot{\varphi}(t)) .$$

Eingesetzt in die rechten Seiten der Bewegungsgleichungen folgt

$$\ddot{z} + g\sin^2\alpha - r\dot{\varphi}^2\sin\alpha\cos\alpha = 0 ,$$

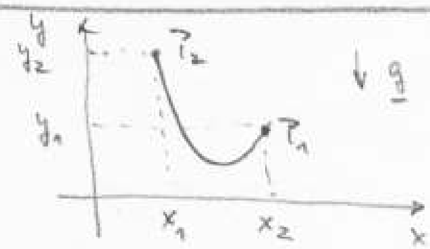
$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha + g\sin\alpha\cos\alpha = 0 \quad \text{und}$$

$$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\,\dot{\varphi} = 0 \;\rightarrow\; \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0 \;\rightarrow\; m\,r^2\dot{\varphi} = \mathrm{const} = L_z .$$

Das bedeutet Drehimpulserhaltung wie im Kap. 2.5: φ taucht nicht in L auf, ist also zyklische Koordinate.

Die verbleibenden beiden Gleichungen stimmen unter Berücksichtigung der Notation $r_{(\text{Kap. }2.7)} = \sin\alpha \; r_{(\text{Kap. }2.5)}$ mit denen in Kap. 2.5 im Rahmen des Lagrange-II-Formalismus abgeleiteten Bewegungsgleichungen überein. Die weitere Vorgehensweise ist in Kap. 2.5 bereits beschrieben. Zusätzlich erhalten wir die Komponenten der Zwangskraft

$$\underline{Z} = \begin{pmatrix} Z_r \\ Z_\varphi \\ Z_z \end{pmatrix} = \lambda(\varphi) \begin{pmatrix} -\operatorname{tg}\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{m r \dot{\varphi}^2 + mg \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} \begin{pmatrix} \operatorname{tg}\alpha \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{m r \dot{\varphi}^2 + mg \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} \begin{pmatrix} \operatorname{tg}\alpha \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



RB: $y(x_1) = y_1$
$y(x_2) = y_2$

- **Kettenlinie**

Ein klassisches Variationsproblem mit Nebenbedingung ist die Beantwortung der Frage: Welche Kurve y(x) beschreibt die Gleichgewichtslage eines Seils/einer Kette, die an zwei Punkten P_1 und P_2 im Schwerefeld der Erde aufgehängt ist.

Die Gleichgewichtslage ergibt sich aus der Bedingung minimaler potenzieller Energie

$$U[y(x)] = \int_1^2 dm\, g\, y = g\rho \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{dx \sqrt{1+y'^2}}_{ds}\; y =: \int_{x_1}^{x_2} dx\; f(y, y', x) \;\to \text{Min},$$

wobei die Dichte ρ als konstant angesehen wird, s die Bogenlänge bezeichnet und y' für die Ableitung der Funktion y nach x steht. Das Minimum des Funktionals U[y(x)] ist unter der Nebenbedingung konstanter Seillänge l

$$l[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1+y'^2} = \text{const}$$

zu bestimmen. Im Sinne der Methode der Lagrange-Multiplikatoren haben wir anstelle der "Lagrange-Funktion" f(y,y',x) zur Berücksichtigung der Nebenbedingung

$$\tilde{f}(y, y', x) = \sqrt{1+y'^2}\;(y - \lambda)$$

zu betrachten (der konstante Faktor ρ g ist unerheblich für die "Bewegungsgleichung"). Da $\tilde{f}$ die unabhängige Variable x (die "Zeit") nicht enthält, besitzen die dazugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen ein 1. Integral (die "Energie")

$$\text{const} = \tilde{f} - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y'} y' = \sqrt{1+y'^2}\,(y-\lambda) - (y-\lambda)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = (y-\lambda)\left(\sqrt{1+y'^2} - \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\right)$$

d.h.

$$\frac{y-\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} =: A = \text{const} \quad \text{oder} \quad y'^2 = \frac{(y-\lambda)^2}{A^2} - 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{dy}{\sqrt{\frac{(y-\lambda)^2}{A^2} - 1}} = dx\,.$$

Mit der Substitution $\cosh z = \frac{y-\lambda}{A}$, $dy = A \sinh z\, dz$ folgt unter Ausnutzung von

$\cosh^2 z - 1 = \sinh^2 z$ sofort $\frac{A \sinh z\, dz}{\sinh z} = dx$, also $A z = x + B'$, $z = \frac{x}{A} + B$, damit

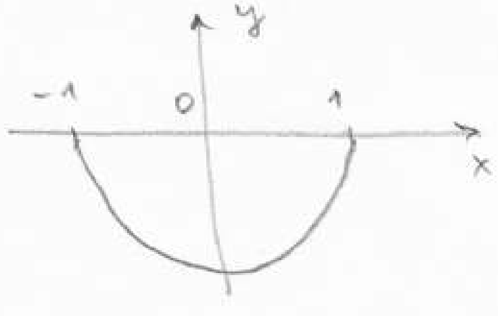
$A z = x + B'$, $z = \cosh\left(\frac{x}{A} + B\right) = \frac{y-\lambda}{A}$ und letztendlich die gesuchte Funktion

$$y(x) = A \cosh\left(\frac{x}{A} + B\right) + \lambda\,.$$

Der Lagrange-Parameter λ und die Integrationskonstanten A und B werden aus den Rand- und der Nebenbedingung bestimmt. Wählen wir beispielsweise die Aufhängepunkte

$P_1 = (x_1, y_1) = (-1{,}0)$ und $P_2 = (x_2, y_2) = (1{,}0)$,

so haben wir die beiden Bedingungen



$$0 = A \cosh\left(-\frac{1}{A} + B\right) + \lambda \quad \text{und} \quad 0 = A \cosh\left(\frac{1}{A} + B\right) + \lambda\,,$$

also B = 0 (denn cosh x ist eine gerade Funktion),

$-A \cosh\frac{1}{A} = \lambda$ und somit

$$y(x) = A \cosh\frac{x}{A} - A \cosh\frac{1}{A}\,.$$

Für die noch unbekannte Konstante A ergibt sich aus der Nebenbedingung mit

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sinh\frac{x}{A}, \quad \sqrt{1+y'^2} = \cosh\frac{x}{A}$$ die transzendente Gleichung

$$l = \int_{-l}^{l} dx\,\sqrt{1+y'^2} = A\sinh\frac{1}{A}\Bigg|_{-l}^{l} = \underline{2A\sinh\frac{l}{A} = l}$$

zur Bestimmung von A bei gegebener Seillänge l.

Es ist nicht erforderlich, die Euler-Lagrange-Gleichung $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\tilde{f}}{\partial y'}\right) - \left(\frac{\partial\tilde{f}}{\partial y}\right) = 0$ abzuleiten und zu lösen.

- **Berücksichtigung von Reibungskräften, Rayleigh'sche Dissipationsfunktion**

Bisher haben wir keine Reibungskräfte im Lagrange-Formalismus berücksichtigt. Um dies zu tun, gehen wir nun zurück zu Kap. 1.4.9, indem wir die NBG in krummlinigen Koordinaten geschrieben haben

$$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F} \quad \xrightarrow{\underline{r}=\underline{r}(\underline{q}),\ \dot{\underline{r}}=\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial \underline{r}}{\partial q_k}\dot{q}_k,\ \ddot{\underline{r}}=\ldots} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\right) = 0, \quad k = 1,\ldots,f = 3N-R \quad .$$

$$\underline{r} = (r_1,\ldots,r_{3N}) \qquad\qquad \underline{q} = (q_1,\ldots,q_f)$$

Nach einigen Umformungen waren wir bei

$$\underline{F}\cdot\underline{e}_k = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{q}_k}\right) - \left(\frac{\partial\tilde{T}}{\partial q_k}\right) \quad \text{(H5)} \quad \text{mit} \quad \underline{e}_k(\underline{q}) := \frac{\partial\underline{r}}{\partial q_k}$$

angelangt und hatten die linke Seite unter der Annahme, die Kraft $\underline{F}$ sei konservativ, weiter vereinfacht. Nun werden wir $\underline{F}$ wie im Kapitel (1.4.8) bei der Diskussion zum

Energieerhaltungssatz für Massepunktsysteme in einen konservativen und einen dissipativen Anteil zerlegen

$$\underline{F} \cdot \underline{e}_k = \underline{F}^{(K)} \cdot \underline{e}_k + \underline{F}^{(D)} \cdot \underline{e}_k \,.$$ (→ Fließbach (?) nennt das die "verallgemeinerte Kraft")

Den konservativen Anteil (der verallgemeinerten Kraft) formen wir wie gehabt um

$$\underline{F}^{(K)} \cdot \underline{e}_k = -\frac{\partial U}{\partial \underline{r}} \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial U}{\partial r_i} \frac{\partial r_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial U(\underline{q}, t)}{\partial q_k} \,.$$

Für die Komponenten des dissipativen Anteils der (verallgemeinerten) Kraft machen wir den Ansatz

$$F_i^{(D)} = -\gamma_i \dot{r}_i$$ → Reibungskräfte proportional zur Geschwindigkeit, γ_i-Reibungskoeffizienten

und definieren die Funktion

$$D(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\gamma_i}{2i} \left[\dot{r}_i(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) \right]^2$$ → **Rayleigh´sche Dissipationsfunktion**

Dann folgt

$$\underline{F}^{(D)} \cdot \underline{e}_k = \sum_{i=1}^{3N} F_i^{(D)} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_k} = -\sum_{i=1}^{3N} \gamma_i \dot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_k} = -\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial D}{\partial \dot{r}_i} \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \overset{*}{=} -\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial D}{\partial \dot{r}_i} \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_k} = -\frac{\partial D(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t)}{\partial \dot{q}_k} \,.$$

Damit lauten die Lagrange-Gleichungen II. Art im Fall linear von der Geschwindigkeit abhängenden Reibungskräften

$$\underline{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} = 0 \,, \quad k = 1, \ldots, f \,.}$$

Beachte: $r_i = r_i(\underline{q},t)$ impliziert $\frac{dr_i}{dt} \equiv \dot{r}_i = \frac{\partial r_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial r_i(\underline{q},t)}{\partial q_k}\dot{q}_k =: \dot{r}_i(\underline{q},\dot{\underline{q}},t)$. Diese Beziehung definiert $\dot{r}_i$ als Funktion von $\underline{q}$, $\dot{\underline{q}}$ und (im allgemeinen Fall) t. Für die so definierten Funktionen $\dot{\underline{r}}(\underline{q},\dot{\underline{q}},t)$ gilt offensichtlich $\frac{\partial \dot{r}_i(\underline{q},\dot{\underline{q}},t)}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial r_i(\underline{q},t)}{\partial q_k}$.