

- **D'Alembert'sches Prinzip**

Dieses Prinzip hat vor allem historische Bedeutung. Wir führen den Begriff der virtuellen Verrückungen ein: Die  $\rightarrow$  **virtuelle Verrückung**  $\delta \mathbf{r}$  ist eine mit den Zwangsbedingungen vereinbare infinitesimale Auslenkung des Systems. Im Unterschied zu einer realen infinitesimalen Auslenkung  $d\mathbf{r}$  sollen sich bei  $\delta \mathbf{r}$  die Kräfte und die Zwangskräfte nicht ändern.

Die von allen Zwangskräften geleistete virtuelle Arbeit ist

$$\delta A^{(Z)} = \sum_{i=1}^{3N} Z_i \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{3N} \underbrace{\left( \sum_{\alpha=1}^R \lambda_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{g}_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}_i} \right)}_{Z_i} \delta \mathbf{r}_i = \sum_{\alpha=1}^R \lambda_{\alpha} \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial \mathbf{g}_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}_i} \delta \mathbf{r}_i = \sum_{\alpha=1}^R \lambda_{\alpha} \delta \mathbf{g}_{\alpha}(\underline{\mathbf{r}}, t) .$$

$\delta \mathbf{g}_{\alpha}$  ist die Änderung von  $\mathbf{g}_{\alpha}$  auf Grund der virtuellen Verrückungen  $\delta \mathbf{r}_i$ . Da diese nach Definition mit den ZB verträglich sein sollen, muss  $\delta \mathbf{g}_{\alpha}(\underline{\mathbf{r}}, t) = 0$  gelten. Daraus folgt

$$\delta A^{(Z)} = \sum_{i=1}^{3N} Z_i \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbf{d'Alembert'sches Prinzip}}}$$

$\rightarrow$  die bei virtuellen Verrückungen  $\delta \mathbf{r}_i$  verrichtete Arbeit der Zwangskräfte ist gleich Null.

Für holonome ZW stehen die ZK senkrecht auf den mit den einzelnen ZB verträglichen Verrückungen und die virtuelle Arbeit der einzelnen ZK verschwindet. Im Fall nichtholonome ZB verschwindet die Summe der virtuellen Arbeit aller ZK.

Mit dem d'Alembert'schen Prinzip lassen sich die Zwangskräfte in den Bewegungsgleichungen eliminieren.

## 2.8 Klassische Feldtheorie

Die Lagrange-Funktion kann auch für nichtmechanische Systeme eingeführt werden. Im Falle von Feldern geht man dabei zweckmäßigerweise von der Lagrange-Dichte aus.

Ziel: Ableitung der Feldgleichungen aus dem Hamilton'schen Variationsprinzip.

"gewöhnliche" **Mechanik**

**Feldtheorie**

$$L(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) =$$

$$= T(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) - \underbrace{\sum_{i=1}^f U_i(\underline{r}_i)}_{\text{äußere Felder}} - \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^f U_{ik}(|\underline{r}_i - \underline{r}_k|)}_{\text{Wechselwirkung}}$$

$$L = L_{\text{Teilchen}} + L_{\text{Feld}} + \underbrace{L_{\text{WW}}}_{\text{Teilchen} \leftrightarrow \text{Felder}}$$

Teilchen wechselwirken über Felder

"Fernwirkung"

"Nahwirkung"

f verallgemeinerte Koordinaten  $q_i(t)$

→ s (klass.) Felder  $U_\alpha(\underline{r}, t)$ ,  $\underline{r} = (x_1, x_2, x_3)^T$

$$L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t)$$

$$\rightarrow L = \int d^3r \tilde{L}\left(\dots, U_\alpha, \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_i}, \frac{\partial U_\alpha}{\partial t}, \dots, \underline{r}, t\right)$$

$$S[\underline{q}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t)$$

$$\rightarrow S[\dots, U_\alpha(\underline{r}, t), \dots] =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \tilde{L}\left(\dots, U_\alpha, \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_i}, \frac{\partial U_\alpha}{\partial t}, \dots, \underline{r}, t\right)$$

Hamilton'sches Variationsprinzip  $\delta S = 0$  führt auf die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \xrightarrow{\text{analog}} \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \left( \frac{\partial U_\alpha}{\partial t} \right)} \right) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \left( \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_i} \right)} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial U_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, s.$$

Variation bzgl. der  $q_i(t)$  führt auf Lagrange-Gleichungen II. Art

Variation bzgl. der Felder  $U_\alpha(\underline{r}, t)$  führt auf Feldgleichungen für die Lagrange-Dichte  $\tilde{L}$

■ **Gravitationsfeld**, nach Newton zeitunabhängig

Wir wollen die Feldgleichung für das Newton'sche Gravitationspotenzial  $\phi(\underline{r})$ , also die Poisson-Gleichung, ableiten ( $U_\alpha(\underline{r}, t) \rightarrow \phi(\underline{r})$ ,  $s = 1$ ). Ausgangspunkt ist die Lagrange-Funktion

$$L = L_{\text{Teilchen}} + L_{\text{Feld}} + L_{\text{WW}} = L_{\text{Teilchen}} - \frac{1}{8\pi\gamma} \int d^3r \sum_{j=1}^3 \frac{\partial\phi}{\partial x_j} \frac{\partial\phi}{\partial x_j} - \sum_{k=1}^N m_k \phi(\underline{r}_k)$$

mit der Energie des Gravitationsfeldes

$$-\frac{1}{8\pi\gamma} \int d^3r |\underline{g}(\underline{r})|^2 = -\frac{1}{8\pi\gamma} \int d^3r \sum_{j=1}^3 \frac{\partial\phi}{\partial x_j} \frac{\partial\phi}{\partial x_j}$$

(siehe Einschub unten) und der Wechselwirkungsenergie im dritten Term. Damit ergibt sich für die Lagrange-Dichte

$$\tilde{L} = -\frac{1}{8\pi\gamma} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial\phi}{\partial x_j} \frac{\partial\phi}{\partial x_j} - \sum_{k=1}^N m_k \delta(\underline{r} - \underline{r}_k) \phi(\underline{r}),$$

wobei der Anteil der Teilchen  $L_{\text{Teilchen}}$  weggelassen werden kann, weil bei Ableitung der Feldgleichungen nach dem Feldern (hier nach  $\phi(\underline{r})$ ) zu variieren ist. Wir haben

$$\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\phi} = -\sum_{k=1}^N m_k \delta(\underline{r} - \underline{r}_k) = -\rho(\underline{r}) \quad \text{Massedichte (N Punktmassen bei } \underline{r}_k \text{ erzeugen das G-Feld),}$$

$$\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)} = 0 \quad \text{und}$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)} \right) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial}{\partial \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)} \left[ -\frac{1}{8\pi\gamma} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right] \right) = -\frac{1}{8\pi\gamma} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} 2 \frac{\partial \phi}{\partial x_i} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\gamma} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} = -\frac{1}{4\pi\gamma} \Delta \phi.$$

Aus  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)} \right) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \phi} = 0$  folgt  $-\frac{1}{4\pi\gamma} \Delta \phi + \rho(\mathbf{r}) = 0,$

also wie erwartet die Poisson-Gleichung

$$\Delta \phi = 4\pi\gamma \rho(\mathbf{r}).$$

Wegen  $\underline{g}(\mathbf{r}) = -\underline{\nabla} \phi(\mathbf{r})$  ist die Quelledichte des Gravitationsfeldes  $\text{div } \underline{g}(\mathbf{r}) = -4\pi\gamma \rho(\mathbf{r})$ . Die Wirbelfreiheit des Gravitationsfeldes gemäß  $\text{rot } \underline{g}(\mathbf{r}) = -\underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \phi(\mathbf{r}) = 0$  drückt aus, dass das G-Feld konservativ ist (vgl. Kap. 1.4.7).

- **Einschub: Energie des Gravitationsfeldes**

Das Gravitationsfeld ist Träger von Energie, die wir im folgenden berechnen wollen.

Auf eine Punktmasse/Probemasse  $m$  wird im G-Feld  $\underline{g}(\mathbf{r})$  die Kraft  $\underline{F} = m \underline{g}(\mathbf{r})$  ausgeübt. Um  $m$  von Punkt 1 nach Punkt 2 zu verschieben, ist die Arbeit

$$A = -\int_1^2 \underline{F} \cdot d\underline{r} = -m \int_1^2 \underline{g} \cdot d\underline{r} \stackrel{\underline{g} = -\text{grad}\phi}{=} m \int_1^2 d\phi = m[\phi(2) - \phi(1)]$$

zu leisten. Die Energie des G-Feldes definieren wir folgendermaßen:

Def.: Die Energie einer auf einen endlichen Raumbereich beschränkten Masseverteilung/Konfiguration  $\rho(\underline{r})$  entspricht der Arbeit, die notwendig ist, um Massen aus dem Unendlichen ( $\phi(\underline{r} \rightarrow \infty) = 0$ ) zu dieser Konfiguration zusammenzuziehen.

(i) Energie eines G-Feldes, das von N-Punktmassen  $m_j$  an den Orten  $\underline{r}_j$  erzeugt wird:

$i-1$  Punktmassen  $m_j$  an den Orten  $\underline{r}_j$  erzeugen am Ort  $\underline{r}_i$  das Potenzial  $\phi(\underline{r}_i) = -\gamma \sum_{j=1}^{i-1} \frac{m_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|}$ .

Um die  $i$ -te Masse aus dem Unendlichen an den Ort  $\underline{r}_i$  zu bringen, ist die Arbeit  $A_i = m_i \phi(\underline{r}_i)$  erforderlich ( $\phi(\underline{r} \rightarrow \infty) = 0$ ). Wir summieren diese Teilarbeiten  $A_i$  von  $i = 2$  bis auf  $i = N$  und erhalten die Energie des G-Feldes zu

$$A = \sum_{i=2}^N A_i = -\gamma \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{m_i m_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|} = -\frac{\gamma}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{i-1} \frac{m_i m_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|}.$$

(Arbeitsaufwand für Platzierung der ersten Punktmasse Null).

(ii) Energie des G-Feldes einer lokalisierten kontinuierlichen Masseverteilung  $\rho(\underline{r})$

$$A = \sum_{i=2}^N A_i = -\gamma \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{m_i m_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|} = -\frac{\gamma}{2} \int d^3 \underline{r} \int d^3 \underline{r}' \frac{\rho(\underline{r}) \rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} = \frac{1}{2} \int d^3 \underline{r} \rho(\underline{r}) \phi(\underline{r})$$

Man kann die Energie  $A$  statt durch  $\rho(\underline{r})$  und  $\phi(\underline{r})$  durch  $\underline{g}(\underline{r})$  ausdrücken. Mit  $\Delta \phi = 4\pi\gamma\rho(\underline{r})$  folgt

$$A = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\gamma} \int d^3 \underline{r} \Delta \phi(\underline{r}) \phi(\underline{r}) = \frac{1}{8\pi\gamma} \left( \int d^3 \underline{r} \operatorname{div}(\phi \underline{\nabla} \phi) - \int d^3 \underline{r} (\underline{\nabla} \phi)^2 \right) \stackrel{\text{Gauß}}{=} \frac{1}{8\pi\gamma} \int d\underline{f} \cdot (\phi \underline{\nabla} \phi) - \frac{1}{8\pi\gamma} \int d^3 \underline{r} (\underline{\nabla} \phi)^2.$$

Das Flächenintegral über eine im Unendlichen liegende, also  $\rho(\underline{r})$  umschließende Oberfläche verschwindet wegen  $\phi \sim 1/r$ ,  $\phi \underline{\nabla} \phi \sim 1/r^3$  und  $d\underline{f} \sim r^2$ . Mit  $\underline{g}(\underline{r}) = -\underline{\nabla} \phi(\underline{r})$  folgt der oben verwendete Ausdruck

$$A = -\frac{1}{8\pi\gamma} \int d^3 \underline{r} |\underline{g}(\underline{r})|^2.$$

### 3. Schwingungen

#### 3.1 Motivation

Bisher haben wir uns im wesentlichen mit harmonischen Schwingungen  $m\ddot{x} + kx = 0$ , sowie mit gedämpften  $m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0$  und erzwungenen  $m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = f(t) = a \cos \omega t$  <sup>z.B.</sup> Schwingungen in einer Dimension beschäftigt. In harmonische Näherung für das Potenzial erhalten wir stets lineare Schwingungen, deren Frequenz unabhängig von der Auslenkung durch die Parameter des Schwingers gegeben ist  $\omega_0^2 = k/m$ . Amplitude und Phase der Schwingung sind durch die Anfangsbedingungen gegeben.

Die nichtlinearen Schwingungen lassen sich in konservativ und dissipativ unterteilen:

- Anharmonische Schwingungen → konservativ nichtlinear

Duffing-Oszillator:  $m\ddot{x} + kx + bx^3 = 0$  oder das ebene mathematische Pendel mit

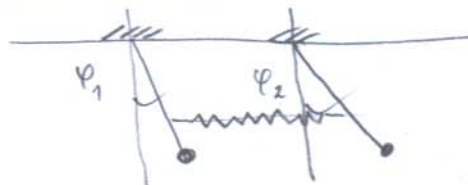
$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$  bei hinreichend großen Auslenkungen (vgl. Kap. 1.4.9)

- selbsterregte Schwingungen (Autoschwingungen) → dissipativ nichtlinear

van der Pol-Oszillator:  $m\ddot{x} + \gamma(x^2 - 1)\dot{x} + kx = 0$

In diesem Kapitel interessieren wir uns für Schwingungen in Systemen mit vielen Freiheitsgraden, z.B. für

- Gekoppelte Pendel

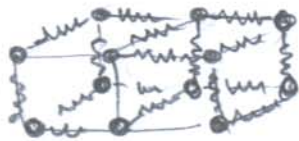


- Eindimensionale Kette von N Atomen/Molekülen ~~→ Übung~~



- Atom- und Molekülschwingungen → Spektroskopie

■ Schwingungen in Festkörpern



→ Schallausbreitung (Phononen)

→ Wärmekapazität (Gleichverteilungssatz,

Einstein/Debye:  $c \sim T^3$ , für  $T \rightarrow 0$ )

### 3.2 Kleinamplitudige Schwingungen in Systemen mit vielen Freiheitsgraden

Wir verwenden verallgemeinerte Koordinaten  $\underline{q} = (q_1, \dots, q_f)$ ,  $f$ - Anzahl der Freiheitsgrade, und betrachten Schwingungen kleiner Amplitude um eine stabile Gleichgewichtslage  $\underline{q}^0$  der potenziellen Energie  $U(\underline{q})$ , d.h.

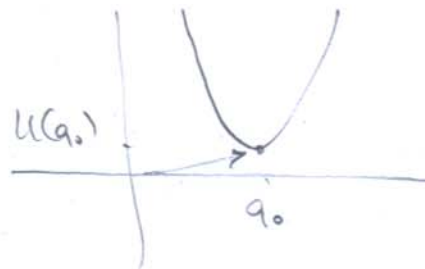
$$\left. \frac{\partial U}{\partial q_i} \right|_{\underline{q}^0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\underline{q}^0} =: k_{ij} = k_{ji} \quad \text{symmetrisch.}$$

In der Umgebung von  $\underline{q}^0$  ist die potenzielle Energie

$$U(\underline{q}) = U(\underline{q}^0) + \underbrace{\sum_{i=1}^f \left. \frac{\partial U}{\partial q_i} \right|_{\underline{q}^0}}_{\text{Null}} (\underline{q} - \underline{q}^0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^f \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\underline{q}^0} (\underline{q} - \underline{q}^0)^2 + O((\underline{q} - \underline{q}^0)^3) \cong \underbrace{U(\underline{q}^0)}_{\text{konstant}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^f \underbrace{k_{ij}}_{\substack{\text{positiv definit,} \\ \text{damit GG stabil}}} (\underline{q} - \underline{q}^0)^2$$

Wenn wir den Koordinatenursprung in den Punkt  $(U(\underline{q}^0), \underline{q}^0)$  verschieben und die kleinen Abweichungen  $\delta \underline{q} = \underline{q} - \underline{q}^0$  mit  $\underline{q}$  bezeichnen, erhalten wir für die potenzielle Energie in harmonischer Näherung

$$U(\underline{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^f k_{ij} q_i q_j$$



Die kinetische Energie ergibt sich über

$$T(\dot{\underline{r}}) = \sum_{n=1}^{3N} \frac{m_n}{2} \dot{\underline{r}}_n^2 \quad \underbrace{=}_{\underline{r}=\underline{r}(\underline{q})} \sum_{n=1}^{3N} \frac{m_n}{2} \dot{\underline{r}}_n^2 \sum_{i,j=1}^f \frac{\partial r_n}{\partial q_i} \dot{q}_i \frac{\partial r_n}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

zu

$$T(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^f m_{ij}(\underline{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j \quad \text{mit} \quad m_{ij}(\underline{q}) := \sum_{n=1}^{3N} m_n \frac{\partial r_n}{\partial q_i} \frac{\partial r_n}{\partial q_j} = m_{ji}(\underline{q}).$$

In harmonischer Näherung ist dann

$$T(\dot{\underline{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^f m_{ij}(0) \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

denn in diesem Fall sind sowohl  $\underline{q}$  als auch  $\dot{\underline{q}}$  proportional zu der als klein angenommenen Auslenkung, die Korrekturen also von der Größenordnung  $O(q, \dot{q}^2, \dot{q}^3)$ .

Fazit: Die Lagrange-Funktion für kleinamplitudige Schwingungen um eine stabile Gleichgewichtslage in einem System mit  $f$  Freiheitsgraden ist in harmonischer Näherung

$$\underline{\underline{L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^f (m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - k_{ij} q_i q_j)}}, \quad m_{ij} := m_{ij}(\underline{q}^0) := \sum_{n=1}^{3N} m_n \left. \frac{\partial r_n}{\partial q_i} \frac{\partial r_n}{\partial q_j} \right|_{\underline{q}^0} = m_{ji}, \quad \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\underline{q}^0} =: k_{ij} = k_{ji}.$$

Aus

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} = \sum_{j=1}^f m_{sj} \dot{q}_j, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \right) = \sum_{j=1}^f m_{sj} \ddot{q}_j, \quad \frac{\partial L}{\partial q_s} = \sum_{j=1}^f k_{sj} q_j$$

ergeben sich die Lagrange-Gleichungen II. Art

$$\sum_{j=1}^f (m_{ij} \ddot{q}_j + k_{ij} q_j) = 0, \quad i = 1, \dots, f. \quad (\text{H1})$$

Diese Gleichungen beschreiben gekoppelte Schwingungen  $\left( \sum_{j=1}^f ! \right)$ : Ein schwingender

Freiheitsgrad regt alle übrigen zum Schwingen an  $\rightarrow$  kollektive Anregungen.



Da es sich um ein System linearer Differentialgleichungen handelt, verwenden wir den Lösungsansatz

$$q_j(t) = A_j e^{i\omega t}.$$

Er führt auf das algebraische Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^f (-\omega^2 m_{ij} + k_{ij}) A_j = 0 \quad (\text{H2})$$

dessen nichttriviale Lösungen  $A_j \neq 0$  die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\det(-\omega^2 m_{ij} + k_{ij}) = 0$$

sind. Die charakteristische Gleichung ist ein Polynom vom Grade  $f$  in  $\omega^2$  mit reellen Koeffizienten, dessen Nullstellen  $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_f^2$  i.a. komplex sind.

Im vorliegenden Falle sind alle  $\omega_\alpha^2$  reell und positiv:  $\sum_{i=1}^f (\text{H2}) A_i^*$  führt auf

$$\sum_{i,j=1}^f (-\omega^2 m_{ij} + k_{ij}) A_j A_i^* = 0 \quad \text{also} \quad \omega^2 = \frac{\sum_{i,j=1}^f k_{ij} A_j A_i^*}{\sum_{i,j=1}^f m_{ij} A_j A_i^*}$$

Zähler und Nenner sind positiv (Zähler und Nenner positiv definite quadratische Formen) und reell<sup>1)</sup>. Negative oder komplexe  $\omega_\alpha^2$  würden  $\omega_\alpha$  mit negativem Imaginärteil nach sich ziehen, die exponentiell anwachsenden instabilen Schwingungen entsprächen. Dies stände im Widerspruch zur angenommenen Stabilität der Gleichgewichtslage  $q_i^0$ .

<sup>1)</sup> Das kann man leicht direkt zeigen, da  $k_{ij}$  und  $m_{ij}$  reelle symmetrische Matrizen

$$\left( \sum_{i,j=1}^f k_{ij} A_j A_i^* \right)^* = \sum_{i,j=1}^f k_{ij} A_j^* A_i = \sum_{i,j=1}^f k_{ji} A_i^* A_j \stackrel{i \leftrightarrow j}{=} \sum_{i,j=1}^f k_{ij} A_j A_i^* \stackrel{k_{ij}=k_{ji}}{=} \sum_{i,j=1}^f k_{ij} A_j A_i^*$$

Die positiven reellen Lösungen  $\omega_\alpha > 0$  ( $\alpha = 1, \dots, f$ ) der charakteristischen Gleichung werden  $\rightarrow$  **Eigenfrequenzen** genannt. Sie stellen die für alle Massepunkte  $m_n$  gemeinsamen, in den Matrizen  $m_{ij}$  und  $k_{ij}$  „verschlüsselten“ Schwingungsfrequenzen dar.

Die dazugehörigen Schwingungen mit Amplituden  $A_j^\alpha$  aus

$$\sum_{j=1}^f (-\omega_\alpha^2 m_{ij} + k_{ij}) A_j^\alpha = 0, \quad i = 1, \dots, f \quad (\text{H3})$$

heißen **Eigenschwingungen**/Normalschwingungen/Normalmoden. Sie zeichnen sich durch eine besonders hohe Symmetrie der Bewegung aus. Die allgemeine Lösung ist die Superposition der Eigenschwingungen

$$q(t) = \sum_{\alpha=1}^f \underline{A}^\alpha B_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha).$$

Die Anfangsbedingungen legen die  $2f$  reellen Integrationskonstanten  $B_\alpha$  und  $\varphi_\alpha$  fest.

### 3.3 Normalschwingungen. Transformation auf Normalkoordinaten

Man verifiziert leicht die Orthogonalitätsrelationen

$$\sum_{i,j=1}^f A_i^\alpha m_{ij} A_j^\beta = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{und} \quad \sum_{i,j=1}^f A_i^\alpha k_{ij} A_j^\beta = \omega_\alpha^2 \delta_{\alpha\beta}$$

Beweis wenn alle  $\omega_\alpha$  voneinander verschieden (keine Entartung):

Einerseits folgt aus (H2)  $\sum_{j=1}^f k_{ij} A_j^\alpha = \omega_\alpha^2 \sum_{j=1}^f m_{ij} A_j^\alpha$  nach Multiplikation mit  $A_i^\beta$  und

Summation über  $i$

$$\sum_{ij=1}^f \underline{A_i^\beta k_{ij} A_j^\alpha} = \omega_\alpha^2 \sum_{j=1}^f A_i^\beta m_{ij} A_j^\alpha = \omega_\alpha^2 \sum_{i,j=1}^f A_j^\alpha m_{ij} A_i^\beta \stackrel{i \leftrightarrow j}{=} \omega_\alpha^2 \sum_{i,j=1}^f \underline{A_i^\alpha m_{ij} A_j^\beta}.$$

Andererseits ist

$$\sum_{j=1}^f k_{ij} A_j^\beta = \omega_\beta^2 \sum_{j=1}^f m_{ij} A_j^\beta \quad | \cdot A_i^\alpha, \sum_{i=1}^f \rightarrow \sum_{i,j=1}^f A_i^\alpha k_{ij} A_j^\beta = \omega_\beta^2 \sum_{i,j=1}^f A_i^\alpha m_{ij} A_j^\beta = \sum_{\substack{i \leftrightarrow j \\ k_{ij}=k_{ji}}} A_i^\beta k_{ij} A_j^\alpha$$

Subtraktion liefert die erste Orthogonalitätsbedingung,

$$0 = (\omega_\alpha^2 - \omega_\beta^2) \sum_{i,j=1}^f A_i^\alpha m_{ij} A_j^\beta$$

vorausgesetzt, es liegt keine Entartung vor. Die zweite folgt analog.

Mit Hilfe der quadratischen Matrix

$$\underline{\underline{\mathbf{a}}} = (\mathbf{A}_i^\alpha) = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \dots & A_1^f \\ A_2^1 & A_2^2 & \dots & A_2^f \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_f^1 & A_f^2 & \dots & A_f^f \end{pmatrix}$$

aus den Spaltenvektoren  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^\alpha$  gemäß (H3)<sup>1)</sup> führen wir neue Koordinaten  $Q_\alpha$  ein

$$q_i = \sum_{\alpha=1}^f A_i^\alpha Q_\alpha \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{\mathbf{q}}} = \underline{\underline{\mathbf{a}}} \underline{\underline{\mathbf{Q}}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{Q}}} = \underline{\underline{\mathbf{a}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{q}}} .$$

Die Orthogonalitätsrelationen (H4) können mit  $\underline{\underline{\mathbf{a}}}$  und  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^\alpha$  in kompakter Form geschrieben werden

$$\sum_{i,j=1}^f A_i^\alpha m_{ij} A_j^\beta = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^\alpha \underline{\underline{\mathbf{m}}} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^\beta = \delta_{\alpha\beta}, \quad \underline{\underline{\mathbf{a}}} \underline{\underline{\mathbf{m}}} \underline{\underline{\mathbf{a}}} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i,j=1}^f A_i^\alpha k_{ij} A_j^\beta = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^\alpha \underline{\underline{\mathbf{k}}} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^\beta = \omega_\alpha^2 \delta_{\alpha\beta}, \quad \underline{\underline{\mathbf{a}}} \underline{\underline{\mathbf{k}}} \underline{\underline{\mathbf{a}}} = \omega_\alpha^2 \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} .$$

Die Bewegungsgleichungen für die neuen Koordinaten ergeben sich aus (H1) zu

$$0 = \sum_{j=1}^f (m_{ij} \ddot{q}_j + k_{ij} q_j) = \sum_{j=1}^f \sum_{\alpha=1}^f (m_{ij} A_j^\alpha \ddot{Q}_\alpha + k_{ij} A_j^\alpha Q_\alpha) \left| \cdot A_i^\beta (\text{von links}), \sum_{i=1}^f \right.$$

$$0 = \sum_{\alpha=1}^f \left( \ddot{Q}_\alpha \underbrace{\sum_{ij=1}^f A_i^\beta m_{ij} A_j^\alpha}_{\delta_{\alpha\beta}} + Q_\alpha \underbrace{\sum_{ij=1}^f A_i^\beta k_{ij} A_j^\alpha}_{\omega_\alpha^2 \delta_{\alpha\beta}} \right) = \ddot{Q}_\beta + \omega_\beta^2 Q_\beta.$$

Sie beschreiben entkoppelte, voneinander unabhängige harmonische Schwingungen mit Eigenfrequenzen  $\omega_\alpha$ . Das bedeutet für die Lagrange-Funktion

$$L(\underline{Q}, \underline{\dot{Q}}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^f (\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2),$$

wie man leicht auch direkt zeigt:

$$2L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) = \sum_{i,j=1}^f (m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - k_{ij} q_i q_j) = \dot{\underline{q}}^T \underline{\underline{m}} \dot{\underline{q}} - \underline{q}^T \underline{\underline{k}} \underline{q} = (\underline{\underline{a}} \dot{\underline{Q}})^T \underline{\underline{m}} (\underline{\underline{a}} \dot{\underline{Q}}) - (\underline{\underline{a}} \underline{Q})^T \underline{\underline{k}} (\underline{\underline{a}} \underline{Q}) =$$

$$= \dot{\underline{Q}}^T (\underline{\underline{a}}^T \underline{\underline{m}} \underline{\underline{a}}) \dot{\underline{Q}} - \underline{Q}^T (\underline{\underline{a}}^T \underline{\underline{k}} \underline{\underline{a}}) \underline{Q} = \sum_{\alpha=1}^f (\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2).$$

- Doppelpendel
- N über Federn gekoppelte MP (Massen m) auf einem Kreis (Radius R)