4. Das Zwei-Körper-Problem

4.1 Lagrange-Gleichungen, Integrale der Bewegung, Bahnkurven

Betrachtet werden zwei Punktmassen m_1 und m_2 an den Orten $\underline{r}_1(t)$ und $\underline{r}_2(t)$, die über ein abstandsabhängiges Potenzial $U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|)$ miteinander wechselwirken und ansonsten keinen weiteren Kräften wie äußeren Feldern, Reibungskräften usw. ausgesetzt sind. Die Lagrange-Funktion lautet

$$L(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \dot{\underline{r}}_1, \dot{\underline{r}}_2) = \frac{m_1}{2}\dot{\underline{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\underline{r}}_2^2 - U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|)\,.$$

Sie ist nicht explizit zeitabhängig, d.h., es gilt Energieerhaltung (s.u.).

Um die Bahnkurven $\underline{r}_1(t)$ und $\underline{r}_2(t)$ berechnen zu können, führen wir zunächst Schwerpunkts- und Relativkoordinaten $\underline{R}(t)$ bzw $\underline{r}(t)$ ein

$$\underline{R}(t) := \frac{m_1\,\underline{r}_1(t) + m_2\,\underline{r}_2(t)}{M},\ \ \underline{r}(t) := \underline{r}_1(t) - \underline{r}_2(t),\ \ M := m_1 + m_2\,.$$

Sind die Abhängigkeiten $\underline{R}(t)$ und $\underline{r}(t)$ bekannt, lassen sich aus

$$\underline{r}_1(t) = \underline{R}(t) + \frac{m_2}{M}\underline{r}(t) \ \text{ und } \ \underline{r}_2(t) = \underline{R}(t) - \frac{m_1}{M}\underline{r}(t)$$

die gesuchten Bahnkurven $\underline{r}_1(t)$ und $\underline{r}_2(t)$ der beiden Punktmassen bestimmen. Nach einfachen algebraischen Umformungen lässt sich L als Funktion von r, R und deren Ableitungen nach der Zeit ausdrücken

$$L(\underline{r}, \underline{R}, \dot{\underline{r}}, \dot{\underline{R}}) = \frac{M}{2}\dot{\underline{R}}^2 + \frac{\mu}{2}\dot{\underline{r}}^2 - U(r)\,,$$

wobei $\mu := \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ die sogenannte → reduzierte Masse bezeichnet. Da $\underline{R}$ eine zyklische Variable ist, folgt $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\underline{R}}}\right) = 0$ also $M\dot{\underline{R}}(t) = \text{const}$. Das bedeutet, der Schwerpunkt der beiden Punktmassen bewegt sich geradlinig-gleichförmig (Gesamtimpuls ist Integral der Bewegung, vgl. auch Kap. 1.4.8). Es ist aus diesem Grunde sinnvoll, den Koordinatenursprung in den Schwerpunkt zu verlegen und sich fortan nur mit der Relativbewegung zu befassen. Die Lagrange-Funktion der Relativbewegung lautet

$$L(\underline{r},\dot{\underline{r}}) = \frac{\mu}{2}\dot{\underline{r}}^2 - U(r) \ .$$

Sie beschreibt die <u>dreidimensionale</u> Bewegung <u>eines</u> fiktiven Teilchens der Masse μ im Zentralpotenzial $U(r)$. Wegen der vorliegenden Zentralsymmetrie wählen wir im Folgenden sphärische (Relativ)Koordinaten $\underline{r} = (r, \vartheta, \varphi)^T$, also $\dot{\underline{r}} = (\dot{r}, r\dot{\vartheta}, r\sin\vartheta\,\dot{\varphi})^T$ und erhalten

$$L = \frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2\right) - U(r) = L(r,\vartheta,\dot{r},\dot{\vartheta},\dot{\varphi}) .$$

In diese Lagrange-Funktion geht φ nicht explizit ein

$$\rightarrow \quad \varphi \text{ zyklisch, also } \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_\varphi := \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2\,\dot{\varphi}\,\sin^2\vartheta = \text{const} = L_z .$$

p_φ ist der Drehimpuls der Relativbewegung, die Drehimpulserhaltung ist Folge der Zentralsymmetrie und gilt für alle physikalischen Systeme, deren Lagrange-Funktion rotationsinvariant ist (Vgl. Kap. Symmetrie und Erhaltungssätze, Nöther-Theorem).

Es ist somit sinnvoll, die Relativbewegung durch ebene Polarkoordinaten r,φ in der Bahnebene senkrecht zu $\underline{L}$ zu beschreiben, d.h.

$$L = \frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - U(r) .$$

Die Lagrange-Gleichung für φ gibt wegen $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2\,\dot{\varphi} = L_z$ die Relation

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L_z}{\mu r^2}\ .\quad \text{(H1)}$$

Aus der Lagrange-Gleichung für r $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial r}\right) = 0$ folgt mit

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = \frac{d}{dt}(\mu\dot{r}) = \mu\ddot{r},\ \frac{\partial L}{\partial r} = \mu\, r\,\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} = \mu\, r\,\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r}$$

die Bahngleichung

$$\mu\ddot{r} = \mu\, r\,\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} \overset{(H1)}{=} -\frac{\partial U_{eff}}{\partial r},\ \text{wobei}\ U_{eff}(r) := U(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}\ .$$

Durch die Einführung des effektiven Potenzials $U_{eff}(r)$ ist das Zwei-Körper-Problem im dreidimensionalen Raum auf die eindimensionale Bewegung eines fiktiven Teilchens der Masse μ unter dem Einfluss des äußeren Feldes U_{eff} zurückgeführt worden. Der zweite Term in U_{eff} wird häufig als $\rightarrow$ Fliehkraftbarriere bezeichnet.

Für diese Bewegung gilt Energieerhaltung:

$$\frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + U_{eff}(r) = \text{const} =: E\,.\quad \text{(H2)}$$

Formal folgt diese physikalisch sofort einleuchtende Beziehung aus der Tatsache, dass die Lagrange-Funktion $L = \frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\varphi}^2\right) - U(r)$ nicht explizit von der Zeit abhängt und deshalb (vgl. Kap. 2.4) $\dot{r}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \dot{\varphi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - L$ ein Integral der Bewegung ist; dass das Bewegungsintegral gleich E ist, möge jeder selbst durch einfache Rechnung verifizieren.

Zur Bestimmung der Bahnkurve r(t) müssen wir nicht direkt die Bahngleichung lösen, sondern erhalten aus dem Energieerhaltungssatz (EES) $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{eff})}$, also

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{eff})}} \quad , \qquad \text{(H3)}$$

sofort folgende Relation für die Umkehrfunktion t(r)

$$t(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{\mu}[E - U_{eff}(r)]}} + t_0 ; \quad t(r_0) = t_0 .$$

Unter Verwendung des Drehimpulserhaltungssatzes (DIES), der auf (H1) führte, lässt sich dann im Prinzip φ(t) berechnen

$$\varphi(t) = \frac{L_z}{\mu} \int_{t_0}^{t} \frac{dt'}{r^2(t')} + \varphi_0 , \ \varphi(t_0) = \varphi_0 ,$$

vorausgesetzt, es gelingt, das Integral in t(r) für gegebenes U(r) zu lösen und r(t) zu bestimmen.

Alternativ kann man mit Hilfe der Relationen (H1,H3) die Bahnkurve in Polarkoordinaten ausrechnen. Da

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{d\varphi}{dt}\frac{dt}{dr} \overset{(H1,H3)}{=} \frac{L_z}{\mu r^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{eff})}}$$

folgt nach Integration

$$\varphi(r) = L_z \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{2\mu[E - U_{eff}(r')]}} + \varphi_0 = L_z \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{2\mu[E - U(r')] - \frac{L_z^2}{r^2}}} + \varphi_0 .$$

Energie E und Drehimpuls L_z sowie $\varphi_0 = \varphi(r_0)$ werden aus den Anfangsbedingungen bestimmt.

Diese Bahnkurven sind bei finiter Bewegung i.a. Rosettenbahnen, die die Fläche des Kreisrings zwischen r_{min} und r_{max} vollständig überstreichen [L^2, § 14.7]. Bei einmaligem Durchlaufen der Folge $r_{min} \to r_{max} \to r_{min}$ ändert sich der Winkel um (vgl. Skizze)

$$\Delta\varphi = 2\,L_z \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{2\mu\left[E - U(r')\right] - \frac{L_z^2}{r^2}}} \; .$$

Die Bahnkurven sind geschlossen, wenn die Winkeländerung nach n Durchläufen ein ganzzahliges Vielfaches von 2π, d.h. $\Delta\varphi$ rationaler Teil von 2π ist:

Geschlossene Bahnkurven für $\Delta\varphi = 2\pi \frac{m}{n}$ (m,n –ganze Zahlen) $\leftrightarrow$ $U(r) \sim \begin{cases} r^{-1} \to \Delta\varphi = 2\pi \\ r^2 \to \Delta\varphi = \pi \end{cases}$

Diese Bedingung ist nur für das Gravitationspotenzial und den (3d) harmonischen Oszillator erfüllt. Für alle anderen Potenziale U(r) sind m und n inkommensurabel, so dass die Bahnkurve die Fläche des Kreisrings $r_{min} < r < r_{max}$ für $t \to \infty$ vollständig überstreicht.

Für einen "Sturz in das Gravitationszentrum" (Bewegung im Zentralfeld) muss die Zentralfeldbarriere überwunden werden. Aus der Bedingung für die (klassisch) erlaubte Bewegung $r^2\,U(r) + L_z^2/2\mu < r^2\,E$ folgt, dass $r \to 0$ nur möglich ist, wenn

$$\lim_{r\to 0} r^2\,U(r) < -\frac{L_z^2}{2\mu} \;\to\; \text{Sturz ins Zentrum für} \;\; \lim_{r\to 0} U(r) \propto \begin{cases} -\frac{\alpha}{r^2}, \text{mit } \alpha > \frac{L_z^2}{2\mu} \\ -\frac{1}{r^n}, \text{ mit } n > 2 \end{cases} \; .$$

■ Explizite Bestimmung der Bahnkurven bei zwei gravitativ wechselwirkenden Punktmassen/bei Bewegung im Gravitationspotenzial

Eine qualitative Diskussion der klassisch erlaubten Bewegung unter Berücksichtigung des Energieerhaltungssatzes (H2) führt im Fall der finiten Bewegungen auf elliptische oder kreisförmige Bahnkurven sowie auf Hyberbelbahnen bei infiniter Bewegung (vgl. Übung/Übungsblatt).

Hier geht es nun um die explizite Berechnung der Bahnkurven $r(\varphi)$ der finiten Bewegung. Wir integrieren nicht die Bahngleichung, sondern nutzen sofort das Bewegungsintegral (EES)

$$\frac{\mu}{2}\frac{L_z^2}{\mu^2 r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+\frac{L_z^2}{2\mu r^2}-\gamma\frac{\mu M}{r}=E\ .$$

Diese Darstellung ergibt sich aus (H2) unter Verwendung von $\dot{r}=\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}=\frac{dr}{d\varphi}\frac{L_z}{\mu r^2}$.

Nach Einführung der neuen abhängigen Variablen $u(\varphi)$ entsprechend der Substitution

$$u(\varphi)=\frac{1}{r(\varphi)},\ \frac{du}{d\varphi}=-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}=-u^2\frac{dr}{d\varphi},\ \text{also}\ \frac{dr}{d\varphi}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\varphi}$$

folgt $\frac{L_z^2}{2\mu}u^4\frac{1}{u^4}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+\frac{L_z^2}{2\mu}u^2-\gamma\mu M u=E \xrightarrow{|\cdot 2\mu/L_z^2} \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+u^2-\frac{2\gamma\mu^2 M}{L_z^2}u=\frac{2\mu E}{L_z^2}$.

Über die quadratische Ergänzung erhalten wir

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+\left(u-\frac{\gamma\mu^2 M}{L_z^2}\right)^2=\frac{2\mu E}{L_z^2}+\frac{\gamma^2\mu^4 M^2}{L_z^4}\ \text{bzw.}\ \frac{1}{2}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+\frac{1}{2}\left(u-\frac{1}{p}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{2\mu E}{L_z^2}+\frac{1}{p^2}\right)\quad \text{(H4)}$$

wenn wir den neuen Parameter p gemäß $\frac{1}{p}:=\frac{\gamma\mu^2 M}{L_z^2}$ verwenden und die ganze Gleichung

mit $\frac{1}{2}$ multiplizieren. Formal ist (H4) dem EES für einen harmonischen Oszillator äquivalent.

Der erste Term auf der linken Seite beschreibt in dieser Analogie die kinetische Energie (u-Auslenkung des Schwingers, φ-Zeit, Masse gleich Eins) und der zweite Term die potentielle Energie (Federkonstante gleich Eins, Auslenkungen um die Ruhelage $1/p$. In der von uns gewählten Interpretation ist der Term auf der rechten Seite von (H4) die Energie E_{HO} des fiktiven harmonischen Oszillators, die sich über $E_{HO} = A^2/2$ durch die Amplitude A

$$A := \sqrt{\frac{2\mu E}{L_z^2} + \frac{1}{p^2}} = \frac{1}{p}\sqrt{1 + \frac{2\mu E}{L_z^2} p^2} = \frac{1}{p}\sqrt{1 + \frac{2\mu E}{L_z^2}\frac{L_z^4}{\gamma^2 \mu^4 M^2}} = \frac{1}{p}\sqrt{1 + \frac{2E\,L_z^2}{\gamma^2 \mu^3 M^2}} = \frac{\varepsilon}{p}$$

der harmonischen Schwingung ausdrücken lässt. Dabei ist $\varepsilon := \sqrt{1 + \frac{2E\,L_z^2}{\gamma^2 \mu^3 M^2}}$.

Die gesuchte Lösung u(φ) lautet demzufolge $u(\varphi) - \frac{1}{p} = A\cos(\varphi - \varphi_0)$, d.h. wir erhalten

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad p = \frac{L_z^2}{\gamma \mu^2 M}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\,L_z^2}{\gamma^2 \mu^3 M^2}}. \qquad \text{(H5)}$$

(H5) ist die Darstellung der Kegelschnitte in Polarkoordinaten. Der Parameter ε bestimmt die Exzentrizität der Bahnkurven in Abhängigkeit von Energie und Drehimpuls der Bewegung.

Fallunterscheidung:

(i) $E < 0$ ($\varepsilon < 1$) → finite Bewegung:

Bahnkurven sind Ellipsen mit M in einem der Brennpunkte. Da $\cos(\varphi - \varphi_0) = \left(\frac{p}{r} - 1\right)\frac{1}{\varepsilon}$ zwischen +1 und -1 liegen muss, gilt $r_{min} = \frac{p}{1+\varepsilon} < r < \frac{p}{1-\varepsilon} = r_{max}$.

(ii) $E > 0$ ($\varepsilon > 1$) → infinite Bewegung:

Die Bahnkurven der infiniten Bewegung sind Hyperbeln. Das fiktive Teilchen mit der Masse μ nähert sich aus dem Unendlichen auf einer für hinreichend große r annähernd geraden Bahn kommend dem Zentrum des Gravitationsfeldes, wird abgelenkt (→ gestreut) und entfernt sich wieder Richtung Unendlich. Der Streuwinkel $\theta = 2\arcsin\frac{1}{\varepsilon}$ ist abhängig von Energie und Drehimpuls.