6. Raum-Zeit-Symmetrie und Erhaltungssätze. Noether-Theorem

→ Jede Invarianz der Lagrange-Funktion eines physikalischen Systems gegenüber einer infinitesimalen Transformation der Koordinaten und/oder der Zeit (→ das bezeichnen wir als Symmetrie)

$$q_i \to \tilde{q}_i = q_i + \varepsilon \psi_i((\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) + O(\varepsilon^2), \; t \to \tilde{t} = t + \varepsilon \varphi(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) + O(\varepsilon^2) \quad \text{(H)}$$

ist mit einem Erhaltungssatz/Integral der Bewegung $Q(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) = \text{const}$ für das betrachtete physikalische System verknüpft.

Symmetrie von Raum-Zeit/	⇔	Erhaltungssatz/
Invarianz von L, also $L = \tilde{L}$		Integral der Bewegung

$L = \tilde{L}$ bedeutet, die betrachteten Transformationen lassen die Bewegungsgleichung invariant.

Bevor wir uns mit der Frage befassen, wie das Integral der Bewegung aus den Transfomationsformeln $\psi_i(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t)$ und $\varphi(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t)$ berechnet werden kann, betrachten wir einige Beispiele für Symmetrietransformationen. Bei der Überprüfung der Relation $L = \tilde{L}$ legen wir ein MPS aus N MP mit der Lagrange-Funktion

$$L(\underline{r}_1, \underline{r}_2, ..., \underline{r}_N, \dot{\underline{r}}_1, \dot{\underline{r}}_2, ..., \dot{\underline{r}}_N, t) = L(\{\underline{r}_i\}, \{\dot{\underline{r}}_i\}, t) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\underline{r}}_i^2 - U(\underline{r}_1, \underline{r}_2, ..., \underline{r}_N, t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\underline{r}}_i^2 - \sum_{\alpha=1}^{s} U_\alpha(\underline{r}_i, t) - \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{N} U_{ik}\left(\left|\underline{r}_i - \underline{r}_k\right|\right)$$

zugrunde. Neben der kinetischen Energie werden s äußere Felder U_α berücksichtigt, die Wechselwirkung zwischen den MP ist auf Paarwechselwirkungen mit abstandsabhängigem Potenzial U_{ik} beschränkt, was $\underline{F}_{ik} = -\underline{F}_{ki}$ sichert (vgl. Kap. 1.4.8).

A: Zunächst untersuchen wir, welchen Erhaltungssatz die Invarianz der Lagrange-Funktion gegenüber einer infinitesimalen Verschiebung aller N MP um einen infinitesimal kleinen, konstanten Vektor $d\underline{a}$ ($\rightarrow$ also einer Verschiebung des Koordinatenursprungs um $d\underline{a}$) nach sich zieht. Die Transformationsformeln lauten in diesem Falle

$$\underline{r}_i \;\rightarrow\; \underline{\tilde{r}}_i = \underline{r}_i + d\underline{a}\;, \quad \underline{\dot{r}}_i \;\rightarrow\; \underline{\dot{\tilde{r}}}_i = \underline{\dot{r}}_i\;, \quad t \rightarrow \tilde{t} = t\,. \quad \text{(H1)}$$

<u>Angenommen</u>, es ist $L = \tilde{L}$. Dann gilt

$$0 = \tilde{L} - L = L(\{\underline{r}_i + d\underline{a}\},\{\underline{\dot{r}}_i\},t) - L(\{\underline{r}_i\},\{\underline{\dot{r}}_i\},t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \underline{r}_i} \cdot d\underline{a} + O\big((d\underline{a})^2\big) \underset{\text{L II}}{=} \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \underline{r}_i}\right) \cdot d\underline{a} + O\big((d\underline{a})^2\big) = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\underline{p}_i \cdot d\underline{a} + O\big((d\underline{a})^2\big),$$

wobei $\underline{p}_i$ der Impuls des i-ten MP ist. $d\underline{a}$ ist beliebig, d.h. es muss für $L = \tilde{L}$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\underline{p}_i = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\underline{p}_i = \frac{d\underline{P}}{dt} = 0 \quad \text{also} \quad \sum_{i=1}^{N}\underline{p}_i = \underline{P} = \text{const}$$

gelten.

Fazit: Wenn L eines physikalischen Systems invariant unter der Transformation (H1) ist, wenn also alle Punkte des Raumes äquivalent sind (als Ursprung des KS dienen) können, dann bleibt der Gesamtimpuls ($\rightarrow$ Schwerpunktimpuls) des betrachteten Systems erhalten:

Homogenität des Raumes $\Leftrightarrow$ **Impulserhaltung**

■ Im Fall des MPS aus N wechselwirkenden MP ist $L = \tilde{L}$ wegen $\underline{\tilde{r}}_i - \underline{\tilde{r}}_k = \underline{r}_i - \underline{r}_k$ und $\underline{\dot{\tilde{r}}}_i = \underline{\dot{r}}_i$ offensichtlich nur dann erfüllt, wenn es keine äußeren Felder U_α gibt. Diese vereiteln wegen $U_\alpha(\underline{r}_i + d\underline{a}, t) = U_\alpha(\underline{r}_i, t) + \underline{\nabla} U_\alpha \cdot d\underline{a} + O\big((d\underline{a})^2\big) \neq U_\alpha(\underline{r}_i, t)$ die Invarianz von L unter (H1), solange $\sum_{\alpha=1}^{s} \underline{F}_\alpha(\underline{r}_i) = -\sum_{\alpha=1}^{s} \underline{\nabla} U_\alpha(\underline{r}_i) \neq 0$. Das bedeutet: Ist die resultierende äußere Kraft auf ein MPS gleich Null (weil es, z.B., keine äußeren Felder gibt), bleibt der Gesamtimpuls erhalten und der Schwerpunkt bewegt sich geradlinig gleichförmig, wie in Kap. 1.4.8 bereits bewiesen, allerdings ohne sich auf die Homogenität des Raumes in diesem Fall zu beziehen.

B: Welcher Erhaltungssatz entspricht der Invarianz der Lagrange-Funktion eines physikalischen Systems gegenüber der Transformation

$$\underline{r}_i \to \underline{\tilde{r}}_i = \underline{r}_i \;, \quad \underline{\dot{r}}_i \to \underline{\dot{\tilde{r}}}_i = \underline{\dot{r}}_i \;, \quad t \to \tilde{t} = t + dt \,, \qquad \text{(H2)}$$

also der Verschiebung des Zeitanfangs um dt?

Wenn $L = \tilde{L}$, dann ist $\tilde{L} - L = L(\ldots, t + dt) - L(\ldots, t) = \frac{\partial L}{\partial t} dt = 0$, also $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$. Wegen

$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{dH}{dt}$ (vgl. Kap. 2.4, Sonderfall Energieerhaltung) impliziert $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

H = const.

Fazit: Wenn die Lagrange-Funktion invariant unter der Transformation (H2) ist, wenn also alle Zeitpunkte äquivalent sind, dann bleibt die Energie des betrachteten Systems erhalten:

Homogenität der Zeit ⇔ **Energieerhaltung**

■ Im Fall des MPS aus N wechselwirkenden MP ist $L = \tilde{L}$ bzw. $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ nur dann erfüllt, wenn die potenzielle Energie nicht explizit zeitabhängig ist: $U(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \ldots, \underline{r}_N)$.

C: Welcher Erhaltungssatz entspricht der Invarianz der Lagrange-Funktion eines physikalischen Systems gegenüber einer infinitesimalen Drehung um einen beliebigen, infinitesimal kleinen konstanten Winkel $\underline{d\varphi}$, also der Transformation

$$\underline{r}_i \to \underline{\tilde{r}}_i = \underline{r}_i + \underline{d\varphi} \times \underline{r}_i \;, \quad \underline{\dot{r}}_i \to \underline{\dot{\tilde{r}}}_i = \underline{\dot{r}}_i + \underline{d\varphi} \times \underline{\dot{r}}_i \;, \quad t \to \tilde{t} = t\,? \qquad \text{(H3)}$$

Wenn L invariant unter der Transformation (H3) bleibt, dann gilt

$$0 = \widetilde{L} - L = L(\{\underline{r}_i + \underline{d\varphi} \times \underline{r}_i\}, \{\dot{\underline{r}}_i + \underline{d\varphi} \times \dot{\underline{r}}_i\}, t) - L(\{\underline{r}_i\}, \{\dot{\underline{r}}_i\}, t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial L}{\partial \underline{r}_i} \cdot (\underline{d\varphi} \times \underline{r}_i) + \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i} \cdot (\underline{d\varphi} \times \dot{\underline{r}}_i) \right] + O\left((\underline{d\varphi})^2\right) \underset{\text{zyklische V}}{\cong} \underline{d\varphi} \cdot \sum_{i=1}^{N} \left(\underline{r}_i \times \frac{\partial L}{\partial \underline{r}_i} + \dot{\underline{r}}_i \times \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i} \right) =$$

$$= \underline{d\varphi} \cdot \sum_{i=1}^{N} \left[\underline{r}_i \times \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i} \right) + \dot{\underline{r}}_i \times \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i} \right] = \underline{d\varphi} \cdot \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \underline{r}_i \times \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}_i} \right) = \underline{d\varphi} \cdot \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \underline{r}_i \times \underline{p}_i \right) = \underline{d\varphi} \cdot \frac{d\underline{L}}{dt}.$$

Für beliebige $\underline{d\varphi}$ kann $\widetilde{L} = L$ nur gelten, wenn

$$\underline{L} = \sum_{i=1}^{N} \underline{r}_i \times \underline{p}_i = \text{const}$$

ist.

Fazit: Erweist sich L als invariant unter der Transformation (H3), d.h. gegenüber der Drehung des Koordinatensystems um eine beliebige Achse, so bleibt der Gesamtdrehimpuls $\underline{L}$ des durch die Lagrange-Funktion L beschriebenen physikalischen Systems erhalten:

Isotropie des Raumes $\Leftrightarrow$ **Drehimpulserhaltung**

Bem.: Gilt $\widetilde{L} = L$ bei Drehung um eine bestimmte Achse (z.B. $\underline{d\varphi}$ in z-Richtung), so bleibt die Projektion des Gesamtdrehimpulses auf diese bestimmte Richtung (also L_z) erhalten

■ Im von uns betrachteten Beispiel des MPS aus N wechselwirkenden MP ist die Invarianzbedingung $L = \widetilde{L}$ erfüllt, wenn keine äußeren Felder vorhanden sind. Beweis:

$$(\widetilde{\underline{r}}_i - \widetilde{\underline{r}}_k)^2 = (\underline{r}_i + \underline{d\varphi} \times \underline{r}_i - \underline{r}_k + \underline{d\varphi} \times \underline{r}_k)^2 = \left[(\underline{r}_i - \underline{r}_k) + \underline{d\varphi} \times (\underline{r}_i - \underline{r}_k) \right]^2 =$$

$$= (\underline{r}_i - \underline{r}_k)^2 + 2\,(\underline{r}_i - \underline{r}_k) \cdot \underline{d\varphi} \times (\underline{r}_i - \underline{r}_k) + O\left((d\varphi)^2\right)$$

- **Verallgemeinerung: Theorem von E. Noether**

Jede einparametrige infinitesimale kontinuierliche Transformation der Koordinaten und der Zeit (H), die die Wirkung invariant lässt, bedeutet die Existenz des Integrals der Bewegung

$$Q(\underline{q},\underline{\dot{q}},t)=\sum_{i=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\psi_i+\left(L-\sum_{i=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\varphi-F(\underline{q},t)=\mathrm{const}\,. \qquad \text{(H4)}$$

Beweis: Wir entwickeln $\tilde{S}$ unter Berücksichtigung von $t=t(\tilde{t})$, also $d\tilde{t}=\frac{d\tilde{t}}{dt}\cdot dt$ in eine Taylor-Reihe nach Potenzen von ε

$$\tilde{S}=\int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2}d\tilde{t}\,L(\underline{\tilde{q}},\underline{\dot{\tilde{q}}},\tilde{t})=\int_{t_1}^{t_2}dt\left\{L\left(\underline{q},\frac{d\underline{q}}{dt},t\right)+\frac{d}{d\varepsilon}\left[L\left(\underline{\tilde{q}},\frac{d\underline{\tilde{q}}}{d\tilde{t}},\tilde{t}\right)\frac{d\tilde{t}}{dt}\right]\Bigg|_{\varepsilon=0}+O(\varepsilon^2)\right\}$$

Der erste Term auf der rechten Seite der Gleichung ist die Wirkung S. Unterscheiden sich die zu $\tilde{S}$ und S gehörenden Lagrange-Funktionen lediglich um Terme, die als vollständige Ableitunge einer Funktion $F(\underline{q},t)$ der verallgemeinerten Koordinaten und der Zeit darstellbar sind, dann gilt $\delta\tilde{S}=\delta S$, d.h., die Bewegungsgleichungen sind invariant unter (H)

Invarianzbedingung: $\frac{d}{d\varepsilon}\left[L\left(\underline{\tilde{q}},\frac{d\underline{\tilde{q}}}{d\tilde{t}},\tilde{t}\right)\frac{d\tilde{t}}{dt}\right]\Bigg|_{\varepsilon=0}=\frac{dF(\underline{q},t)}{dt}$.

Wegen

$$\frac{d\tilde{t}}{dt}=1+\varepsilon\frac{d\varphi}{dt}+O(\varepsilon^2)$$

$$\frac{d\tilde{q}_i}{d\tilde{t}}=\frac{d\tilde{q}_i}{dt}\frac{dt}{d\tilde{t}}=\left(\dot{q}_i+\varepsilon\frac{d\psi_i}{dt}\right)\frac{1}{1+\varepsilon\frac{d\varphi}{dt}}+O(\varepsilon^2)=\left(\dot{q}_i+\varepsilon\frac{d\psi_i}{dt}\right)\left(1-\varepsilon\frac{d\varphi}{dt}\right)+O(\varepsilon^2)\cong\dot{q}_i+\varepsilon\frac{d\psi_i}{dt}-\varepsilon\,\dot{q}_i\frac{d\varphi}{dt}$$

ergibt die Auswertung der Invarianzbedingung

$$0=\frac{d}{d\varepsilon}\left[L\left(q_i+\varepsilon\psi_i,\dot{q}_i+\varepsilon\frac{d\psi_i}{dt}-\varepsilon\,\dot{q}_i\frac{d\varphi}{dt},t+\varepsilon\varphi\right)\left(1+\varepsilon\frac{d\varphi}{dt}\right)\right]\Bigg|_{\varepsilon=0}=$$

$$=\sum_{i=1}^{f}\left[\underset{\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ}{\frac{\partial L}{\partial q_i}\psi_i}+\overset{******}{\underset{\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ}{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}}\left(\underset{\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ}{\frac{d\psi_i}{dt}}-\overset{********}{\dot{q}_i\frac{d\varphi}{dt}}\right)\right]+\frac{\partial L}{\partial t}\varphi+\overset{*********}{L\frac{\partial\varphi}{\partial t}}=\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\psi_i+\left(L-\sum_{i=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\varphi\right]=0.$$

Die $_{\circ\circ\circ}$ markierten Terme haben wir unter Berücksichtigung der Lagrange-Gleichungen II. Art $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ zu $\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\psi_i\right)$ zusammengefasst. Mit Hilfe der Relation $\frac{\partial L}{\partial t}=-\frac{dH}{dt}=\frac{d}{dt}\left(L-\sum_{i=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)$ ergeben die drei *** Terme $\frac{d}{dt}\left[\left(L-\sum_{i=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\varphi\right]$.

Bei der Anwendung des Noether-Theorems können wir folgendermaßen vorgehen:

(1) Wir bestimmen die Funktionen $\psi_i(\underline{q},\underline{\dot{q}},t)$ und $\varphi(\underline{q},\underline{\dot{q}},t)$ der ins Auge gefassten Transformation (H) und überprüfen

(2), ob die Lagrange-Funktion des betrachteten physikalischen Systems invariant gegenüber dieser Transformation ist. Dabei werden eventuell vorhandene Terme der Form $\frac{dF(\underline{q},t)}{dt}$ in L abgetrennt. Liegt Invarianz vor, dann lässt sich

(3) aus $L(\underline{q},\underline{\dot{q}},t)$, $\psi_i(\underline{q},\underline{\dot{q}},t)$, $\varphi(\underline{q},\underline{\dot{q}},t)$ und $F(\underline{q},t)$ mit Hilfe von (H4) das entsprechende Integral der Bewegung $Q(\underline{q},\underline{\dot{q}},t)=\text{const}$ ausrechnen.

■ Beispiele

A: (1) Wir wählen die Transformation $\psi_i = 0$ und $\varphi = 1$, d.h. $\tilde{q}_i(\tilde{t}) = q_i(t+\varepsilon)$, bzw. $\frac{d\tilde{t}}{dt} = 1$ und $\frac{d\tilde{q}_i}{d\tilde{t}} = \frac{dq_i}{dt}$.

(2) Für Systeme, deren Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt, ist die Invarianzbedingung wegen $\frac{d}{d\varepsilon}\left[L\left(\underline{\tilde{q}}, \frac{d\underline{\tilde{q}}}{d\tilde{t}} \right) \frac{d\tilde{t}}{dt} \right]\Bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon} L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) = 0$ erfüllt.

(3) Also ist für diese Systeme $Q(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = L - \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \text{const}$.

B: (1) Wir betrachten die Transformation $\tilde{q}_k = q_k + \varepsilon \delta_{ik}$, d.h. $\psi_{ik} = \delta_{ik}$ und $\tilde{t} = t$, also $\varphi = 0$.

(2) Für Lagrange-Funktionen mit der zyklischen Koordinate q_i tritt das Argument $\tilde{q}_i$ nur in Form von $\frac{d\underline{\tilde{q}}}{d\tilde{t}} = \frac{d(q_i + \varepsilon)}{dt} = \frac{dq_i}{dt}$ auf. Folglich hängen alle Argumente von $\tilde{L}$ nicht von ε ab, die Invarianzbedingung $\frac{d}{d\varepsilon}\left[L\left(\underline{\tilde{q}}, \frac{d\underline{\tilde{q}}}{d\tilde{t}}, \tilde{t} \right) \frac{d\tilde{t}}{dt} \right]\Bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon} L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = 0$ ist erfüllt.

(3) Mit (H4) reduziert sich Q auf $Q(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i = \text{const}$, also auf das bekannte Resultat, dass für zyklische q_i der kanonisch konjugierte Impuls Integral der Bewegung ist.

7. Mechanik des starren Körpers

■ Hantel, Billardkugel, Kreisel, keltischer Wackelstein usw.

Wir fassen den starren Körper (SK) als System aus N Massepunkten auf, deren relative Lage zueinander (Abstand untereinander) sich nicht verändert. Ein SK besitzt maximal 6 Freiheitsgrade, 3 Translations- und 3 Rotationsfreiheitsgrade (zwei zur Festlegung der Richtung der Drehachse $\underline{\omega}$, 1 für ω). Ein Kreisel, der in einem Punkt abgestützt ist, hat 3, ein um eine feste Achse rotierendes Pendel einen Freiheitsgrad usw.

7.1 Raumfestes und körperfestes Bezugssystem

Wir führen ein raumfestes kartesisches Koordinatensystem (RKS) mit den Ortsvektoren $\underline{R} = (X, Y, Z)^T$ und den (festen) Einheitsvektoren $\underline{E}_x, \underline{E}_y, \underline{E}_z$ und ein körperfestes (fest mit dem SK verbundenes) Koordinatensystem (KKS) ein, dessen Ortsvektoren wir und Einheitsvektoren wir wahlweise mit $\underline{r} = (x, y, z)^T$ und $\underline{e}_x(t)$, $\underline{e}_y(t)$, $\underline{e}_z(t)$ oder $\underline{r} = (x_1, x_2, x_3)^T$ und $\underline{e}_1(t)$, $\underline{e}_2(t)$, $\underline{e}_3(t)$ bezeichnen. Das RKS ist ein Inertialsystem, das KKS i.a. nicht. Wenn $\underline{R}_0(t)$ der Radiusvektor des Ursprungs des KKS, O, aus Sicht des RKS ist, setzt sich die infinitesimale Verschiebung eines Punktes P des SK mit dem Radiusvektor $\underline{R}(t)$ aus dem Anteil $d\underline{R}_0$ entsprechend der Verschiebung von O bei unveränderter Achsenrichtung $\underline{e}_i(t)$ und der auf O bezogenen Drehung von P um den Winkel $\underline{d\varphi}$ zusammen. Also gilt
$d\underline{R} = d\underline{R}_0 + \underline{d\varphi} \times \underline{r}$ und daher

$$\frac{d\underline{R}}{dt} = \frac{d\underline{R}_0}{dt} + \frac{\underline{d\varphi}}{dt} \times \underline{r} \quad \text{oder} \quad \underline{V}(t) = \underline{V}_0(t) + \underline{\omega}(t) \times \underline{r} \tag{7.1}$$

→ die Geschwindigkeit des Punktes P im RKS addiert sich aus der Geschwindigkeit des Ursprungs des KKS im RKS und der Rotationsgeschwindigkeit des SK.

Verschiebt man O um $\underline{a}$ geht $\underline{V}$ in $\underline{\tilde{V}} = \underline{V}_0 + \underline{\omega} \times (\underline{r} + \underline{a}) = \underline{V}_0 + \underline{\omega} \times \underline{a} + \underline{\omega} \times \underline{r} = \underline{\tilde{V}}_0 + \underline{\omega} \times \underline{r}$ über. Die Rotationsgeschwindigkeit hängt im Gegensatz zur Translationsgeschwindigkeit nicht von der Wahl des Ursprungs O ab.

7.1 Kinetische Energie und Drehimpuls des starren Körpers. Trägheitstensor, Trägheitsmoment und Lagrange-Funktion

Fassen wir den SK als System aus N Massepunkten mit den Ortsvektoren $\underline{r}_\alpha(t)$ ($\alpha = 1, \dots,$ N) auf, dann ist seine kinetische Energie

$$T = \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2} \underline{V}^2 = \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2} (\underline{V}_0 + \underline{\omega} \times \underline{r}_\alpha)^2 = \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2} \underline{V}_0^2 + \sum_\alpha m_\alpha \underline{V}_0 \cdot \underline{\omega} \times \underline{r}_\alpha + \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2} (\underline{\omega} \times \underline{r}_\alpha)^2 =$$

$$= \frac{M}{2} \underline{V}_0^2 + \underline{V}_0 \times \underline{\omega} \cdot \sum_\alpha m_\alpha \underline{r}_\alpha + \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \left[\underline{\omega}^2 \underline{r}_\alpha^2 - (\underline{\omega} \cdot \underline{r}_\alpha)^2 \right].$$

M bezeichnet die Gesamtmasse $M = \sum_\alpha m_\alpha$. Der zweite Term verschwindet, wenn wir den Ursprung des KKS in den Schwerpunkt des SK legen, denn dann ist $\sum_\alpha m_\alpha \underline{r}_\alpha = 0$. Dann ist

$$T = \frac{M}{2} \underline{V}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \left[\underline{\omega}^2 \underline{r}_\alpha^2 - (\underline{\omega} \cdot \underline{r}_\alpha)^2 \right] = T_{trans} + T_{rot}$$

Hinsichtlich der kinetischen Energie der Translation kann man sich die Gesamtmasse im Schwerpunkt vereinigt denken. Der zweite Term gibt die kinetische Energie der Rotationsbewegung um eine <u>Drehachse durch den Schwerpunkt</u> an.

Die "Koordinatenschreibweise" der Roationsenergie sieht mit $\underline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ und $\underline{r}_\alpha = (x_1^\alpha, x_2^\alpha, x_3^\alpha)^T$ folgendermaßen aus:

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \left[\underline{\omega}^2 \underline{r}_\alpha^2 - (\underline{\omega} \cdot \underline{r}_\alpha)^2 \right] = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \left(\sum_{i=1}^3 \omega_i^2 \underline{r}_\alpha^2 - \sum_{i=1}^3 \omega_i x_i^\alpha \sum_{k=1}^3 \omega_k x_k^\alpha \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \left(\sum_{i,k=1}^3 \omega_i \omega_k \delta_{ik} \underline{r}_\alpha^2 - \sum_{i=1}^3 \omega_i x_i^\alpha \sum_{k=1}^3 \omega_k x_k^\alpha \right) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 \theta_{ik} \, \omega_i \, \omega_k$$

wobei wir die Größe

$$\theta_{ik} := \sum_\alpha m_\alpha \left(\underline{r}_\alpha^2 \, \delta_{ik} - x_i^\alpha \, x_k^\alpha \right) \qquad \rightarrow \ \textbf{Trägheitstensor} \text{ des SK}$$

eingeführt haben. Im Falle einer kontinuierlichen Masseverteilung ergibt sich wie üblich über $m_\alpha \rightarrow \rho(\underline{r}_\alpha)\, d^3 r_\alpha$ und $\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \underset{\Delta V_\alpha \to 0}{\overset{N \to \infty}{\longrightarrow}} \int_V d^3 r \, \rho(\underline{r})$ für den Trägheitstensor der Ausdruck

$$\theta_{ik} := \int_V d^3 r \, \rho(\underline{r}) \left(\underline{r}^2 \, \delta_{ik} - x_i \, x_k \right).$$

Der Trägheitstensor $\underline{\underline{\theta}}$ ist offenbar das Analogon zur Masse bei der Translationsbewegung, beschreibt also das Beharrungsvermögen/Trägheitseigenschaften gegen Änderungen in der Rotation des SK.

$\underline{\underline{\theta}}$ hängt von der Lage des Ursprungs und der Orientierung der Achsen des KKS ab.

Wir können $\underline{\underline{\theta}}$ als quadratische 3 x 3 Matrix auffassen. Diese Matrix ist offensichtlich symmetrisch, besitzt also nur 6 unabhängige Matrixelemente:

$$\underline{\underline{\theta}} = \begin{pmatrix} \theta_{xx} & \theta_{xy} & \theta_{xz} \\ \theta_{yx} & \theta_{yy} & \theta_{yz} \\ \theta_{xz} & \theta_{yz} & \theta_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_\alpha m_\alpha (y_\alpha^2 + z_\alpha^2) & -\sum_\alpha m_\alpha \, x_\alpha \, y_\alpha & -\sum_\alpha m_\alpha \, x_\alpha \, z_\alpha \\ -\sum_\alpha m_\alpha \, x_\alpha \, y_\alpha & \sum_\alpha m_\alpha (x_\alpha^2 + z_\alpha^2) & -\sum_\alpha m_\alpha \, y_\alpha \, z_\alpha \\ -\sum_\alpha m_\alpha \, x_\alpha \, z_\alpha & -\sum_\alpha m_\alpha \, y_\alpha \, z_\alpha & \sum_\alpha m_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2) \end{pmatrix}.$$

Dabei wird die gebräuchliche Notation $x_1^\alpha = x_\alpha$, $x_2^\alpha = y_\alpha$, $x_3^\alpha = z_\alpha$ verwendet.
Im kontinuierlichen Fall ist

$$\underline{\underline{\theta}} = \begin{pmatrix} \theta_{xx} & \theta_{xy} & \theta_{xz} \\ \theta_{yx} & \theta_{yy} & \theta_{yz} \\ \theta_{xz} & \theta_{yz} & \theta_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_V d^3 r \, \rho(\underline{r}) \, (y^2 + z^2) & -\int_V d^3 r \, \rho(\underline{r}) \, x\, y & -\int_V d^3 r \, \rho(\underline{r}) \, x\, z \\ -\int_V d^3 r \, \rho(\underline{r}) \, x\, y & \int_V d^3 r \, \rho(\underline{r}) \, (x^2 + z^2) & -\int_V d^3 r \, \rho(\underline{r}) \, y\, z \\ -\int_V d^3 r \, \rho(\underline{r}) \, x\, z & -\int_V d^3 r \, \rho(\underline{r}) \, y\, z & \int_V d^3 r \, \rho(\underline{r}) \, (x^2 + y^2) \end{pmatrix}.$$