Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD und Dr. Kathy Lüdge
Dr. Clive Emary

4. Übungsblatt – Theoretische Physik VI: Nichtgleichgewichtsstatistik

Abgabe: Mo. 22.11.2010 in der Übung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 8 (20 Punkte): *Stochastic Resonance*

Consider a two-state model of stochastic resonance in which position x takes on discrete values x_+ and x_- with probabilities $p(x = x_\pm) = n_\pm$ such that $n_+ + n_- = 1$. The dynamics can be described by the master equation

$$\frac{dn_+}{dt} = -\frac{dn_+}{dt} = W_-(t)n_- - W_+(t)n_+ = W_-(t) - [W_+(t) + W_-(t)]n_+$$

with $W_\pm(t)$ the transition rate out of state $x_\pm$. For this rate we employ Kramers' rate for a periodically driven barrier: $W_\pm(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \exp[-/D(U_0 \pm U_1 \cos\Omega t)]$.

1. Expand the rates as $W_\pm(t) \approx \frac{1}{2}(\alpha_0 \mp \alpha_1\eta_0 \cos\omega_w t)$ for small driving amplitude, $\eta_0 = U_1/D \ll 1$, and identify parameters α_0 and α_1.

2. To first order in η_0, show that the solution of the rate equation is

$$n_+(t|x_0t_0) = \frac{1}{2}\left[e^{-\alpha_0(t-t_0)}\left\{2n_+(t_0) - 1 - \frac{\alpha_1\eta_0\cos(\Omega t_0 - \phi)}{\sqrt{\alpha_0^2 + \Omega^2}}\right\} + 1 + \frac{\alpha_1\eta_0\cos(\Omega t - \phi)}{\sqrt{\alpha_0^2 + \Omega^2}}\right]$$

   with phase $\phi = \arctan\Omega/\alpha_0$.

3. Show that, in the asymptotic limit $t_0 \to -\infty$, we have $\langle x(t)\rangle = \bar{x}(D)\cos(\Omega t - \phi)$, and identify $\bar{x}(D)$ in terms of the Kramers rate parameters. Assume a symmetric system $x_\pm = \pm 1$ and take the probability distribution function to be $p(x) = n_+\delta(x - x_+) + n_-\delta(x - x_-)$.

4. In the limit $t_0 \to -\infty$, the autocorrelation function reads

$$\langle x(t)x(t+\tau)|x_0t_0\rangle = e^{-\alpha_0|\tau|}\left[1 - \frac{\alpha_1^2\eta_0^2\cos^2(\Omega t - \phi)}{\alpha_0^2 + \Omega^2}\right] + \frac{\alpha_1^2\eta_0^2\left[\cos(\Omega\tau) + \cos(\Omega(2t+\tau) + 2\phi)\right]}{2(\alpha_0^2 + \Omega^2)}.$$

   Calculate the power spectrum $S(\omega) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau}\overline{\langle x(t)x(t+\tau)|x_0t_0\rangle}$ of the initial-phase-averaged autocorrelation function

$$\overline{\langle x(t)x(t+\tau)|x_0t_0\rangle} = \Omega/(2\pi)\int_0^{2\pi/\Omega} dt\langle x(t)x(t+\tau)|x_0t_0\rangle.$$

5. Determine the signal-to-noise ratio, SNR (see lecture notes for definition).

6. Sketch $\bar{x}(D)$ and the SNR as a function of noise strength D and discuss. Find the value of D which optimises the SNR. Is this the same value as optimises $\bar{x}(D)$?

Vorlesung:
- Donnerstags 10:15 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203.
- Freitags 10:15 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203.

Übung:
- Montags 12:15 Uhr – 14:00 Uhr im EW 561

Scheinkriterien:
- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.
- Bearbeitung und Vorstellung eines Projektes (Projektvorstellung in der letzten Vorlesungswoche).

Literatur zur Lehrveranstaltung:

Siehe auch Semesterapparat in der Physikbibliothek.

- Crispin W. Gardiner, Handbook of stochastic method, Springer (2004)
- Nicolas G. van Kampen, Stochastic processes in physics and chemistry, North-Holland Publ. (2008)
- Ruslan L. Stratonovich, Topics in the Theory of Random Noise, Vols. I and II, Gordon and Breach (1963)
- Hannes Risken; Till Frank, The Fokker-Planck Equation, Methods of Solutions and Applications, Springer Berlin (1996)
- H. Haken, Quantenfeldtheorie des Festkörpers, Teubner (1973)
- H. Haug, S. W. Koch, Quantum Theory of the optical and electronic properties of semiconductors, World Scientific (2001)
- M. O. Scully, Quantum Optics, Cambridge University Press (1997)
- Scherz, Quantenmechanik, Teubner (2005)