

Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD und Dr. Kathy Lüdge  
Dr. Clive Emary

### 5. Übungsblatt – Theoretische Physik VI: Nichtgleichgewichtsstatistik

#### Abgabe: Mo. 29.11.2010 in der Übung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

#### Aufgabe 9 (15 Punkte): Reine und gemischte Zustände

Sei  $\hat{\rho}$  Dichteoperator auf einem Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$ , also  $\hat{\rho} = \hat{\rho}^*$ ,  $\hat{\rho} > 0$ , und  $\text{Tr } \hat{\rho} = 1$ . Ein Dichteoperator  $\hat{\rho}$  beschreibt einen reinen Zustand, wenn  $\hat{\rho}$  in der Form  $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ ,  $\|\psi\| = 1$ ,  $\psi \in \mathcal{H}$ , geschrieben werden kann.

- (a) Zeigen Sie, dass die Menge aller Dichteoperatoren konvex ist.
- (b) Zeigen Sie, dass für einen reinen Zustand  $\hat{\rho}$  eine Matrixdarstellung gefunden werden kann, so dass in der Diagonale nur eine 1 und sonst Nullen auftreten, während für einen gemischten Zustand mehrere Diagonalelemente zwischen 0 und 1 vorkommen.
- (c) Zeigen Sie, dass  $\hat{\rho}$  genau dann rein ist, wenn  $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$  gilt.
- (d) Zeigen Sie, dass sich jeder Dichteoperator als konvexe Summe reiner Zustände schreiben lässt, d.h.  $\hat{\rho} = \sum_i \lambda_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ , wobei  $\sum_i \lambda_i = 1$  und  $\lambda_i \geq 0$  gilt.
- (e) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass die Zerlegung eines Dichteoperators in reine Zustände i.A. **nicht eindeutig** ist. (Tipp: mischen Sie zwei nicht-orthogonale reine Zustände).
- (f) Der Erwartungswert einer Observablen ist durch

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{A})$$

definiert. Motivieren Sie diese Definition indem Sie  $\lambda_i$  in (d) als statistische Wahrscheinlichkeit für den Zustand  $|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$  auffassen. Warum ist  $\langle \hat{A} \rangle$  unabhängig von der gewählten Zerlegung von  $\hat{\rho}$  in reine Zustände?

- (g) Zeigen Sie mittels einer Zerlegung in reine Zustände, dass  $\hat{\rho}(t)$  die LIOUVILLE-Gleichung

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = [\hat{H}, \hat{\rho}(t)]$$

erfüllt, wobei  $\hat{H}$  der Hamiltonoperator ist. Worin liegt der Unterschied zur Heisenbergschen Bewegungsgleichung?

- (h) Zeigen Sie, dass  $\text{Tr } \hat{\rho}^2(t) = \text{Tr } \hat{\rho}^2(0)$ , und sich daher ein gemischter Zustand nicht in einen reinen Zustand entwickeln kann.

#### Aufgabe 10 (5 Punkte): Two-state density matrix

Consider a single mode of the electromagnetic field with Hamiltonian  $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2})$ . In thermal equilibrium at temperature  $T$ , the system is described by the canonical ensemble  $\hat{\rho} = \mathcal{Z}^{-1} e^{-\hat{H}/k_B T}$  with partition function  $\mathcal{Z} = \text{Tr} \left\{ e^{-\hat{H}/k_B T} \right\}$ . Calculate the mean number of photons in the mode,  $\langle \hat{n} \rangle$ , and express the diagonal elements of the density matrix in the fock basis,  $\hat{\rho}_{nn} = \langle n | \rho | n \rangle$ , in terms of this mean photon number  $\langle \hat{n} \rangle$ .

## 5. Übung TPVI WS10/11

**Vorlesung:**

- Donnerstags 10:15 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203.
- Freitags 10:15 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203.

**Übung:**

- Montags 12:15 Uhr – 14:00 Uhr im EW 561

**Scheinkriterien:**

- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.
- Bearbeitung und Vorstellung eines Projektes (Projektvorstellung in der letzten Vorlesungswoche).

### **Literatur zur Lehrveranstaltung:**

Siehe auch Semesterapparat in der Physikbibliothek.

- Crispin W. Gardiner, Handbook of stochastic method, Springer (2004)
- Nicolas G. van Kampen, Stochastic processes in physics and chemistry, North-Holland Publ. (2008)
- Ruslan L. Stratonovich, Topics in the Theory of Random Noise, Vols. I and II, Gordon and Breach (1963)
- Hannes Risken; Till Frank, The Fokker-Planck Equation, Methods of Solutions and Applications, Springer Berlin (1996)
- H. Haken, Quantenfeldtheorie des Festkörpers, Teubner (1973)
- H. Haug, S. W. Koch, Quantum Theory of the optical and electronic properties of semiconductors, World Scientific (2001)
- M. O. Scully, Quantum Optics, Cambridge University Press (1997)
- Scherz, Quantenmechanik, Teubner (2005)