Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD und Dr. Kathy Lüdge
Dr. Clive Emary

6. Übungsblatt – Theoretische Physik VI: Nichtgleichgewichtsstatistik

Abgabe: Mo. 13.12.2010 in der Übung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 11 (6 Punkte): *Fluctuations and quantum statistics*

Consider three types of particle: classical, fermionic, and bosonic, described by Boltzmann, Fermi-Dirac, and Bose-Einstein statistics respectively. Show that the average occupation of a state with energy E in equilibrium is

$$\langle \hat{n} \rangle = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} + a}; \quad \text{where} \quad a = \begin{cases} 0 & \text{classical} \\ 1 & \text{fermions} \\ -1 & \text{bosons} \end{cases} .$$

Show that the corresponding variance is

$$\left\langle (\Delta \hat{n})^2 \right\rangle = \left\langle (\hat{n} - \langle \hat{n} \rangle)^2 \right\rangle = \langle \hat{n} \rangle \left(1 - a \langle \hat{n} \rangle\right),$$

and interpret the result.

Aufgabe 12 (14 Punkte): *Jaynes-Cummings model*

A simple model of the interaction between a two-level system (atom) and a single bosonic mode is furnished by the Jaynes-Cummings Hamiltonian

$$\mathcal{H}_{\text{JCM}} = \frac{1}{2}\omega_0 \sigma_z + \omega b^\dagger b + \lambda(\sigma_+ b + \sigma_- b^\dagger),$$

with Pauli matrix σ_z and corresponding raising/lowering operators $\sigma_\pm = \frac{1}{2}\left(\sigma_x \pm i\sigma_y\right)$. Given that the atom starts in its excited state $|\uparrow\rangle$ and the field starts in coherent state

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle,$$

show that the atomic inversion as a function of time, $W(t) = \langle \sigma_z(t) \rangle = \langle \alpha, \uparrow | \sigma_z(t) | \alpha, \uparrow \rangle$, is given by

$$W(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\alpha) \cos\left(2\lambda\sqrt{n}t\right),$$

and determine $c_n(\alpha)$. For simplicity, consider the system to be on resonance, $\omega = \omega_0$. Derive analogous expressions for the mean photon number $\langle \hat{n}(t) \rangle$, and the second-order correlation function $g^{(2)}(0;t) = \langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)\hat{a}(t)\rangle / \langle \hat{n}(t) \rangle^2$. Plot the results for several values of $|\alpha|$ and λ $(\omega = \omega_0 = 1)$ and discuss.

Vorlesung:
- Donnerstags 10:15 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203.
- Freitags 10:15 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203.

Übung:
- Montags 12:15 Uhr – 14:00 Uhr im EW 561

Scheinkriterien:
- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.
- Bearbeitung und Vorstellung eines Projektes (Projektvorstellung in der letzten Vorlesungswoche).

Literatur zur Lehrveranstaltung:

Siehe auch Semesterapparat in der Physikbibliothek.

- Crispin W. Gardiner, Handbook of stochastic method, Springer (2004)
- Nicolas G. van Kampen, Stochastic processes in physics and chemistry, North-Holland Publ. (2008)
- Ruslan L. Stratonovich, Topics in the Theory of Random Noise, Vols. I and II, Gordon and Breach (1963)
- Hannes Risken; Till Frank, The Fokker-Planck Equation, Methods of Solutions and Applications, Springer Berlin (1996)
- H. Haken, Quantenfeldtheorie des Festkörpers, Teubner (1973)
- H. Haug, S. W. Koch, Quantum Theory of the optical and electronic properties of semiconductors, World Scientific (2001)
- M. O. Scully, Quantum Optics, Cambridge University Press (1997)
- Scherz, Quantenmechanik, Teubner (2005)