Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Carsten Weber
Dipl. Phys. Alexander Carmele
Dipl. Phys. Ken Lichtner

3. Übungsblatt – Theoretische Physik V: Quantenmechanik II

Abgabe: Fr. 12.11.2010 12:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 8 (8 Punkte): *Spin und Drehimpuls*

Der Spin eines Teilchens wird interpretiert als dessen innerer Drehimpuls. Wir machen uns das plausibel, indem wir folgende vier Relationen für die Spin-/Pauli-Matrizen beweisen, die wir vom Drehimpuls her kennen. Dabei verwenden wir die Pauli-Matrizen, die folgendermaßen aussehen:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Spin-Matrizen $\hat{s}_i$ sind über die Pauli-Matrizen definiert: $\hat{s}_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$.

(a) Zeigen Sie, dass $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$ (Summenkonvention!).

(b) Zeigen Sie, dass $[\sigma^2, \sigma_i] = 0\,\forall i \in \{1, 2, 3\}$.

Sei χ_{m_s} ein Spinor mit Spin $s = 1/2$ und der z-Komponente m_s des Spins. Wir verwenden den einfachsten Spinor:

$$\chi_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \chi_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Zeigen Sie: $\vec{s}^2\chi_{m_s} = \hbar^2 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right)\chi_{m_s}$.

(d) Zeigen Sie: $s_z\chi_{m_s} = \hbar m_s \chi_{m_s}$.

Aufgabe 9 (4 Punkte): *Skalarprodukte mit Pauli-Matrizen*

Seien $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ Vektoren mit drei Skalaren als Einträgen. Der Spin $\boldsymbol{\sigma}$ ist ein Vektor mit den drei Pauli-Matrizen als Einträgen, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^T$.

Zeigen Sie, dass folgendes gilt:

$$(\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = \mathbb{1}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) + i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

Aufgabe 10 (8 Punkte): *Dirac-Hamiltonian und Drehimpulsoperator*

Der Dirac-Hamiltonoperator eines freien Teilchens ist $\hat{H} = c\hat{\alpha}^k\hat{p}_k + \hat{\beta}m_0c^2$. Der zugehörige Spinoperator ist gegeben als $\hat{S}^k = \begin{pmatrix} \hat{s}^k & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{s}^k \end{pmatrix}$, woraus der Helizitätsoperator $\Lambda = \mathbf{S}\cdot\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$ definiert werden kann.

(a) Zeigen Sie, dass der Drehimpulsoperator $\hat{l} = \hat{r}\times\hat{p}$ nicht mit $\hat{H}$ vertauscht. Nutzen Sie dafür die Vertauschungsrelationen der Ort- und Impulsoperatoren.

(b) Zeigen Sie, dass der Spinoperator ebenfalls nicht mit $\hat{H}$ vertauscht.

(d) Zeigen Sie, dass der Gesamtdrehimpuls aber doch mit $\hat{H}$ vertauscht.