Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Carsten Weber
Dr. Frank Milde / Dipl. Phys. Alexander Carmele
Dipl. Phys. Ken Lichtner

10. Übungsblatt – Theoretische Physik V: Quantenmechanik II

Abgabe: Fr. 21.01.2011 12:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 23 (12 Punkte): *Rabioszillationen im Zwei-Niveau-System.*
In Aufgabe 21 wurde das elektronische Zwei-Niveau-System mit Phononenkopplung sowie Ankopplung der Elektronen an ein externes Lichtfeld eingeführt. Vernachlässigt man die Kopplung an die Phononen, so erhält man folgende Differentialgleichungen für $p = \langle a_1^\dagger a_2 \rangle$ und $f = \langle a_2^\dagger a_2 \rangle = 1 - \langle a_1^\dagger a_1 \rangle$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}p =& -i(\omega_2 - \omega_1)p + i\Omega(t)(1-2f)\\ \frac{d}{dt}f =& +2\mathrm{Im}[\Omega(t)p]\end{aligned}$$

Hierbei ist $\Omega(t)$ die Rabifrequenz.

(a) Sei die Einhüllende der Rabifrequenz $\tilde{\Omega}(t)$ durch $\Omega(t) = \tilde{\Omega}(t)\cos(\omega_L t)$ definiert, wobei ω_L gerade die Frequenz der Trägerschwingung der Anregung ist. Desweiteren sei $p = \tilde{p}e^{-i\omega_L t}$. Schreiben Sie die Bewegungsgleichungen in diesen langsam rotierenden Größen und führen Sie die sogenannte Rotating-Wave-Approximation (RWA) durch, indem Sie Rotationen mit doppelter Lichtfrequenz streichen. Mit der Verstimmungsfrequenz (detuning) $\Delta = \omega_L + \omega_1 - \omega_2$ führt dies zu:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\tilde{p} =& i\Delta\tilde{p} + \frac{i}{2}\tilde{\Omega}(t)(1-2f)\\ \frac{d}{dt}f =& \mathrm{Im}[\tilde{\Omega}(t)\tilde{p}]\end{aligned}$$

(b) Betrachten Sie den Fall resonanter Anregung ($\Delta = 0$) mit reellem $\tilde{\Omega}(t)$. Benutzen Sie hier und für die folgenden Aufgabenteile die Anfangsbedingung: $f(-\infty) = p(-\infty) = 0$.

1) Lösen sie explizit das obige Gleichungssystem für $p(t)$ und $f(t)$, indem sie die Größe $\theta(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \tilde{\Omega}(t')dt'$ einführen [Lösung: $p(t) = \frac{i}{2}\sin\theta(t)$]. Berechnen Sie daraus $f(t)$.

2) Diskutieren Sie die Lösung ausführlich. In welchem Endzustand befindet sich das System, wenn die Pulsfläche $\Theta = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \Omega(t)$ gerade die Werte $\frac{\pi}{2}$, π und 2π annimmt?

3) Bestimmen Sie für folgende Pulsformen die analytischen Lösungen und plotten Sie $f(t)$ und $\mathrm{Im}[p(t)]$ im Bereich von $t = -10..10$ps für $\tau = 5$ps und $A = 3\pi$:

i. Rechteckpuls: $\tilde{\Omega}(t) = \begin{cases} A/\tau & \text{für } -\tau < t < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

ii. Kosinuspuls: $\tilde{\Omega}(t) = \begin{cases} A\pi/(2\tau)\cos(\pi t/\tau) & \text{für } -\tau/2 < t < \tau/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Vergleichen Sie die Ergebnisse.

Bitte Rückseite beachten! ⟶

Aufgabe 24 (8 Punkte): *Dekohärenz.*
In einem realen System werden die Kohärenzen durch Ankopplung an die Umgebung gedämpft, was oft durch eine konstante „Dephasierungrate“ γ beschrieben werden kann. Damit lautet die Differentialgleichung für $p(t)$ von oben:

$$\frac{d}{dt}p = i\Delta p + \frac{i}{2}\tilde{\Omega}(t)(1-2f) - \gamma p.$$

(a) Lösen Sie die DGLs für $p(t)$ und $f(t)$ numerisch. Dafür steht auf der VL-Webseite ein Java-Applet zur Verfügung (siehe Link unter „OWL-Projekt“). Plotten Sie $f(t)$ und Im$[p(t)]$ für den Kosinuspuls mit $\Theta = 3.3\pi$, $\tau = 5$ps für die Fälle $\gamma = 1/T_2 = 0, 1/(10\text{ps}), 1/(1\text{ps}), 1/(0.1\text{ps})$ (für $\Delta = 0$). Beschreiben Sie die Entwicklung für zunehmende Dämpfung.

(b) Auf der Webseite ist ein weiteres Java-Applet verfügbar, um die gekoppelten Differentialgleichungen mit Phononenankopplung zu lösen (vgl. Aufg. 22 / Bedienung analog zum anderen Applet, dazugekommen sind Einstellungsmöglichkeiten für Temperatur und Modendiskretisierung). Plotten Sie $|p(t)|$ und beschreiben Sie jeweils für $\gamma = 0$ und $\Delta = 0$:

1) den Verlauf der Polarisation $p(t)$ für niedrige (50K) und hohe (300K) Temperatur bei relativ schwacher Anregung (Pulsfläche $\Theta \leq 0.5\pi$) und $\tau = 5$ps.
2) den Verlauf der Polarisation $p(t)$ für wenige ($= 10$) im Vergleich mit vielen (≥ 100) Moden, bei 50K und relativ schwacher Anregung (Pulsfläche $\Theta \leq 0.5\pi$).
3) den Verlauf der Dichte $f(t)$ bei starker Anregung (Pulsfläche $\Theta = 3\pi$) und hoher Temperatur (300K) für Pulse der Länge 0.5ps, 4ps und 8ps.
4) Handelt es sich bei der Dämpfung in 3) um Energierelaxation oder um „Pure Dephasing“? Vergleichen Sie obige Zeitverläufe mit denen im Zwei-Niveau-System welches radiativ gedämpft wird [Java-Applet aus Teil (a) mit $1/T_2 = 1/(2T_1) = 1/(1\text{ ps})$ (Häckchen bei T_1)] für die drei Pulslängen.