Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 27. Januar 2011
http://www.itp.tu-berlin.de Direktzugang: 90109

Prof. Dr. Tobias Brandes
Dipl.-Phys. Arash Azhand, Dipl.-Phys. Valentin Flunkert, Dipl.-Phys. Philipp Zedler
Benjamin Regler, Jan Techter

12. Übungsblatt zur Theoretischen Physik III: Elektrodynamik

Abgabe: spätestens Montag 31.01.2011. bis 10:00 in den Briefkasten im Ernst-Ruska Gebäude (Physik Altbau).
Die Abgabe erfolgt in **3er Gruppen**.

Aufgabe 33 (3+3+6=12 Punkte): *Viererpotentiale und Feldstärketensor*
In einem Bezugssystem Σ sei das folgende Viererpotential gegeben

$$\mathbf{A} = \frac{a}{2}\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}, \quad \Phi = 0. \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie das Viererpotential in einem Bezugssystem Σ', das sich mit $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$ relativ zu Σ bewegt.

(b) Berechnen Sie aus den jeweiligen Viererpotentialen die elektromagnetischen Felder in Σ und Σ' und vergleichen Sie diese.

(c) Nun müssen wir die Lorentzkraft $\mathbf{F} = Q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{B}\right)$ als Vierervektor schreiben:

$$K^\mu = QF^{\mu\nu}\frac{u_\nu}{c}, \tag{2}$$

mit der Vierer-Teilchengeschwindigkeit $u^\mu = \gamma(c, \mathbf{u})$. Wie lautet demzufolge der allgemeine Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ (siehe Gleichung 5, nächste Aufgabe), sowie $F_{\mu\nu}$? Berechnen Sie die Invariante $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$.

Aufgabe 34 (5+3=8 Punkte): *Maxwellsche Gleichungen in Vierer-Schreibweise*

(a) Zeigen Sie, dass die Vierer-Schreibweise der Maxwellschen Gleichungen:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}j^\nu \tag{3}$$

$$\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\partial^\beta F^{\mu\nu} = 0 \tag{4}$$

mit

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

und $j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$ für Gleichung (3) den Maxwellschen Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$$
$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

und für Gleichung (4)

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

entspricht. Dabei bezeichnet $\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ das Levi-Civita-Symbol mit den Eigenschaften:

$$\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} = \begin{cases} 1, \text{ falls } \alpha\beta\mu\nu \text{ gerade Permutation von } (0,1,2,3) \\ -1, \text{ falls } \alpha\beta\mu\nu \text{ ungerade Permutation von } (0,1,2,3) \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} . \tag{6}$$

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichung (3) durch den Ansatz

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{7}$$

und die Verwendung der Lorentzeichung $\partial_\mu A^\mu = 0$ in die Form

$$\Box A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu \tag{8}$$

gebracht werden kann.

Bonusaufgabe 35 (3+3+2+2=10 Zusatzpunkte): *Lagrangeformalismus und relativistische Teilchen*

Gegeben sei die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{\mathbf{r}}}{c}\right)^2} - Q\Phi + \frac{Q}{c}\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} \tag{9}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}$ die relativistische Bewegungsgleichung für ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld liefert.

(b) Bestimmen Sie den kanonischen Impuls $\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}}$ sowie $H = H(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ und zeigen Sie, dass man diese Größen zum Viererimpuls p^μ zusammenfassen kann, indem man sie durch u^μ und A^μ ausdrückt.

(c) Wie lautet die Hamiltonfunktion $H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$?

(d) Zeigen Sie, dass die Wirkung $S = \int dt \mathcal{L}$ Lorentzinvariant ist, indem Sie sie durch Vierergrößen ausdrücken.