

3. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie I

Abgabe: Freitag 25.11.11 vor der Übung

Aufgabe 1 (3 Punkte): Die 4-er Beschleunigung

In Analogie zur 4-er Geschwindigkeit u^μ wird die 4-er Beschleunigung als

$$\dot{u}^\mu := \frac{du^\mu}{d\tau} \quad (1)$$

definiert.

Leiten sie die Darstellung der 4-er Beschleunigung in Raum- und Zeitkomponenten ab. Welche Form besitzt diese im momentanen Ruhssystem.

Aufgabe 2 (7 Punkte): Maxwell'sche Gleichungen in 4-er Schreibweise

a) Zeigen Sie, dass die 4-er Schreibweise der Maxwell'schen Gleichungen:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} j^\beta \quad (2)$$

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \partial^\beta F^{\gamma\delta} = 0 \quad (3)$$

mit

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

und $j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$ für Gleichung (2) den Maxwell'schen Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi\rho \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

und für Gleichung (3)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

entspricht. Dabei bezeichnet $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ das Levi-Civita-Symbol mit den Eigenschaften:

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \alpha\beta\gamma\delta \text{ gerade Permutation von } (0, 1, 2, 3) \\ -1 & \text{falls } \alpha\beta\gamma\delta \text{ ungerade Permutation von } (0, 1, 2, 3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4)$$

b) Zeigen Sie, dass die Gleichungen (2,3) durch den Ansatz

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha \quad (5)$$

und die Verwendung der Lorenzbedingung $\partial_\alpha A^\alpha = 0$ in die Form

$$\square A^\alpha = \frac{4\pi}{c} j^\alpha \quad (6)$$

gebracht werden können.

c) Wie in der Übung gezeigt, kann aus den Maxwell'schen Gleichungen der Energie-Impulstensor

$$T^\beta{}_\gamma = \frac{c}{4\pi} \left(F^{\alpha\beta} F_{\gamma\alpha} + \frac{1}{4} \delta^\beta{}_\gamma F^{\kappa\lambda} F_{\kappa\lambda} \right) \quad (7)$$

gebildet werden. Bestimmen Sie explizit die T^0_0 - und die T^k_0 -Komponente ($k = 1, \dots, 3$) des Tensors und identifizieren Sie diese Größen mit bekannten Größen aus der Elektrodynamik.

d) Werten Sie die 0-Komponente der Beziehung

$$T^\beta{}_{\gamma,\beta} = j^\alpha F_{\alpha\gamma} \quad (8)$$

explizit aus.