

Prof. Holger Stark,  
Stefan Fruhner, Niels Majer, Maximilian Schmitt, Andreas Zöttl,  
Christian Fräbendorf, Wassilij Kopylov, Benjamin Regler, Emely Wiegand

### 5. Übungsblatt – Theoretische Physik I: Mechanik

**Abgabe: Di. 22.11.2011 bis 8:30 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude**

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium (Tutor und Termin) an. Kreuzen Sie am Beginn des Tutoriums die mündlichen Aufgaben an, die Sie bearbeitet haben und an der Tafel vorrechnen können.

**Aufgabe 13 (12 Punkte):** Fouriertransformation und  $\delta$ -Funktion (schriftlich 1+1+2+2+3+2+1)

Die Definition der Fourier-Transformation (FT) ist gegeben durch:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Man kann dann zeigen, dass sich  $f(t)$  über

$$(1) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

darstellen lässt. Das verallgemeinerte Skalarprodukt zweier komplexer Funktionen  $f(t)$ ,  $g(t)$  ist durch  $\int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)g(t)dt$  gegeben, wobei  $*$  fuer das komplex konjugierte von  $f(t)$  steht.

1. Zeigen Sie, dass für reelle  $f(t)$  gelten muss:  $\hat{f}(-\omega) = \hat{f}^*(\omega)$ .
2. Beweisen Sie, dass Ableitungen bei FT in Multiplikation mit  $\omega$  übergehen:

$$\left( \widehat{\frac{d}{dt} f(t)} \right) = i\omega \hat{f}(\omega)$$

*Hinweis:* Nehmen Sie dazu an, dass  $f(t) \rightarrow 0$  für  $|t| \rightarrow \infty$ .

3. Berechnen Sie die FT  $\hat{\delta}_\varepsilon(\omega)$  für die Rechteckfunktion

$$\delta_\varepsilon(t) := \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{für } |t| \leq \varepsilon/2, \\ 0 & \text{für } |t| > \varepsilon/2 \end{cases}$$

Diskutieren Sie Ihr Resultat für variierendes  $\varepsilon$ . Betrachten Sie insbesondere die Grenzfälle  $\varepsilon \rightarrow 0$  und  $\varepsilon \rightarrow \infty$ .

**Bonus (+2 Punkte):** Berechnen Sie mit Hilfe von Gl. (1)  $\delta_\varepsilon(t)$ .

4. Die  $\delta$ -Distribution ist durch ihre Wirkung auf Funktionen  $f$  definiert:  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)f(x)dx = f(x_0)$ . Berechnen Sie die FT  $\hat{\delta}(\omega)$ . Welche Fourierdarstellung ergibt sich damit für  $\delta(t)$ ?
5. Berechnen Sie die Fourier-Transformierte eines Gaußpaketes der Breite  $\sigma$ :  
 $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$ . Welche Breite besitzt die Fouriertransformierte?  
*Hinweis:* Benutzen Sie hierzu, dass  $\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp[-\alpha(x+i\beta)^2] = \sqrt{\pi/\alpha}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , welches sich mit Hilfe der Funktionentheorie herleiten lässt.
6. Als *Faltung*  $f * g$  zweier Funktionen wird das Integral  $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau$  bezeichnet. Zeigen Sie, dass bei einer FT die Faltung in eine Multiplikation übergeht:  
 $\widehat{(f * g)}(\omega) = \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega)$ .

5. Übung TPI WS11

**Aufgabe 14 (8 Punkte):** *Harmonischer Oszillator mit äußerer Kraft (schriftlich 2+4+2)*

Betrachten Sie den eindimensionalen harmonischen Oszillator mit äußerer Kraft  $F(t)$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F(t).$$

- (a) Berechnen Sie die kausale Greensche Funktion.  
 (b) Lösen Sie mit Hilfe der Greenschen Funktion die DGL für

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \text{ und } t > \tau \\ k/\tau & \text{für } 0 < t < \tau \end{cases} \quad \text{mit } \tau \ll 2\pi/\omega \text{ und } k = \text{const.}$$

- (c) Vergleichen Sie Ihre Lösung für  $\tau \rightarrow 0$  mit der allgemeinen Lösung des harmonischen Oszillators ohne äußere Kräfte.

**Aufgabe (15): Kette (mündlich)**

Eine Kette mit der Masse  $m$  und der Länge  $L$  hänge über eine Tischkante, so daß ein Teil auf dem Tisch liegt, ein anderer Teil (der Länge  $l(t)$ ) vom Tisch herunterhängt.

- (a) Zunächst vernachlässigen wir die Reibungskraft. Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und geben Sie die allgemeine Lösung  $l_{\text{allg}}(t)$  an.  
 (b) Fassen Sie die Lösung für die Anfangsbedingung  $l(t=0) = l_0, \dot{l}(t=0) = 0$  zu einer hyperbolischen Funktion zusammen und stellen Sie diese für  $l_0 = L/2$  graphisch ( $l(t)$ -Diagramm) dar. Wann ist die Kette komplett vom Tisch gerutscht? Was bedeutet das für die Lösung?  
 (c) Am herunterhängenden Kettenende sei ein Körper mit der konstanten Masse  $M$  befestigt. Desweiteren soll eine Reibungskraft wirken, die sich aus der betroffenen Masse der Kette und  $\mu g$  zusammensetzt ( $\mu$  – Haftreibungszahl,  $g$  – Erdbeschleunigung). Erweitern Sie die Bewegungsgleichung und konstruieren Sie die allgemeine Lösung unter Verwendung einer zu ratenden speziellen Lösung und der homogenen Lösung aus (a). Bestimmen Sie die Konstanten für die Anfangsbedingungen aus (b).  
 (d) Welches Stück  $l_0$  der Kette muss anfangs überhängen, damit die Kette von selbst ins Rutschen kommt?

Sprechzeiten:	Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.
	Prof. Holger Stark	FR	11:30–12:30 Uhr	EW 709	29623
	Stefan Fruhner	FR	14:30–15:30 Uhr	EW 627/28	27681
	Niels Majer	DO	13:00–14:00 Uhr	ER 240	29052
	Max Schmitt	DO	10:00–11:00 Uhr	EW 708	25225
	Andreas Zöttl	MI	11:00–12:00 Uhr	EW 702	24253
	Christian Fräbendorf	DI	18:00–19:00 Uhr	EW 060	26143
	Benjamin Regler	MO	13:00–14:00 Uhr	EW 060	26143
	Wassilij Kopylov	MO	16:00–17:00 Uhr	EW 060	26143
	Emely Wiegand	MO	12:00–13:00 Uhr	EW 060	26143

Aktuelle Informationen werden auf der Webseite bekannt gegeben:  
<http://www.tu-berlin.de/index.php?id=109406>