

Prof. Holger Stark,  
 Stefan Fruhner, Niels Majer, Maximilian Schmitt, Andreas Zöttl,  
 Christian Fräßdorf, Wassilij Kopylov, Benjamin Regler, Emely Wiegand

## 6. Übungsblatt – Theoretische Physik I: Mechanik

**Abgabe: Di. 29.11.2011 bis 8:30 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude**

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium (Tutor und Termin) an. Kreuzen Sie am Beginn des Tutoriums die mündlichen Aufgaben an, die Sie bearbeitet haben und an der Tafel vorrechnen können.

### Aufgabe (16): $\delta$ -Distribution (mündlich)

Die  $\delta$ -Distribution ist durch ihre Wirkung auf Funktionen  $f$  definiert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0).$$

- (a) Zeigen Sie, dass durch folgende Funktionenschar (Lorenz-Kurve) im Grenzwert  $\epsilon \rightarrow 0$  eine Darstellung für die „ $\delta$ -Funktion“ gegeben ist:

$$g_{\epsilon}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}.$$

*Hinweis:* Benutzen Sie die Substitution  $y = x/\epsilon$ . Grenzwertbildung und Integration dürfen, wo dies sinnvoll ist, vertauscht werden.

Zeigen Sie:

(b)  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = - \int_0^{\infty} f'(x) dx$ .

*Hinweis:*  $f$  ist differenzierbar und außerhalb eines beschränkten Intervalles Null.

(c)  $\delta(ax) = \delta(x)/|a|$ .

(d)  $\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{d}{dx_0} \delta(x_0 - x) \right) f(x) dx = f'(x_0)$ .

### Aufgabe (17): Lenz-Vektor (schriftlich 3+2+1=6)

Gegeben sei ein Massenpunkt der Masse  $\mu$ , der sich in einem Zentralkraftfeld  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(r)$  bewegt.  $\mathbf{v}$  ist die Geschwindigkeit und  $\mathbf{L}$  der Drehimpuls des Teilchens. Der Vektor

$$\mathbf{A} = \mathbf{v} \times \mathbf{L} + V(r)\mathbf{r}$$

wird als verallgemeinerter, zum Potential  $V(r)$  gehöriger Lenz-Vektor bezeichnet.

- (a) Zeigen Sie, dass für das Potential  $V(r) = -\alpha/r$  der Lenz-Vektor eine Erhaltungsgröße ist.  
 (b) Zeigen Sie nun mit Hilfe des Lenz-Vektors, dass sich die Bahnkurve des Teilchens für  $\alpha < 0$  in der aus der Vorlesung bekannten Form

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi}$$

schreiben lässt, wobei  $\varphi$  der Winkel zwischen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{r}$  ist. Geben Sie die Bahnparameter  $p$  und  $\epsilon$  als Funktion von  $\mu$ ,  $\alpha$ ,  $L$  und  $|\mathbf{A}|$  an.

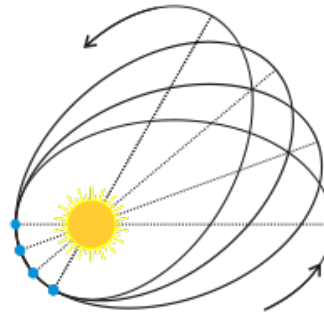
*Hinweis:* Betrachten Sie das Skalarprodukt  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$ .

- (c) Welche anschauliche Bedeutung hat der Lenz-Vektor  $\mathbf{A}$ ?

6. Übung TPI WS11

**Aufgabe (18): Periheldrehung (schriftlich 1+3+7+3=14)**

Im Potential  $V(r) = -\alpha/r$  bewegt sich ein Massenpunkt auf einer Ellipsenbahn. Kleine Störungen  $\delta V$  des Potentials führen zu einer Periheldrehung: Nach jedem Umlauf ändert sich die Richtung des Perihels (Punkt mit minimalem Abstand zum Zentrum) um den Winkel  $\delta\varphi$ . Auf dem Weg von Perihel zu Perihel ändert sich der Winkel um



$$(1) \quad \Delta\varphi = 2 \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{L/r^2}{\sqrt{2\mu[E - V(r)] - L^2/r^2}} dr$$

$$(2) \quad \stackrel{(*)}{=} -2\sqrt{2\mu} \frac{\partial}{\partial L} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \sqrt{E - \frac{L^2}{2\mu r^2} - V(r)} dr.$$

- (a) Motivieren Sie Gleichung (1).  
 (b) Zeigen Sie, dass das Gleichheitszeichen (\*) gilt.  
 (c) Zeigen Sie, dass die Winkeländerung  $\delta\varphi$  für das Potential  $V(r) = -\alpha/r + \delta V(r)$  in erster Näherung gegeben ist durch

$$\delta\varphi = \Delta\varphi - 2\pi \approx 2\mu \frac{\partial}{\partial L} \left[ \frac{1}{L} \int_0^\pi r^2 \delta V(r) d\varphi \right],$$

wobei  $r = r(\varphi)$  die ungestörte Lösung (Bahnkurve aus **Aufgabe 17 (b)**) ist.  
 Dazu:

1. Linearisieren Sie den Integranden von (2) in  $\delta V$ .  
*Hinweis:* Welches  $\Delta\varphi$  erhält man für  $\delta V = 0$ ?
  2. Zeigen Sie, dass sich die Wurzel in (2) als  $\sqrt{\mu/2} \dot{r}$  schreiben lässt.
  3. Benutzen Sie außerdem  $dr/\dot{r} = d\varphi/\dot{\varphi}$  und  $\dot{\varphi} = L/(\mu r^2)$ .
- (d) Die erste relativistische Korrektur zum  $1/r$ -Gravitationsgesetz ist gegeben durch  $\delta V(r) = -\gamma/r^3$ . Zeigen Sie, dass für diese Korrektur  $\delta\varphi = 6\pi\gamma/\alpha p^2$  gilt.  
*Hinweis:* Verwenden Sie die ungestörte Lösung  $r = r(\varphi)$  (Bahnkurve aus **Aufgabe 17 (b)**) und  $p = L^2/(\mu\alpha)$ .

Sprechzeiten:	Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.
	Prof. Holger Stark	FR	11:30–12:30 Uhr	EW 709	29623
	Stefan Fruhner	FR	14:30–15:30 Uhr	EW 627/28	27681
	Niels Majer	DO	13:00–14:00 Uhr	ER 240	29052
	Max Schmitt	DO	10:00–11:00 Uhr	EW 708	25225
	Andreas Zöttl	MI	11:00–12:00 Uhr	EW 702	24253
	Christian Fräbendorf	DI	18:00–19:00 Uhr	EW 060	26143
	Benjamin Regler	MO	13:00–14:00 Uhr	EW 060	26143
	Wassilij Kopylov	MO	16:00–17:00 Uhr	EW 060	26143
	Emely Wiegand	MO	12:00–13:00 Uhr	EW 060	26143

Aktuelle Informationen werden auf der Webseite bekannt gegeben:  
<http://www.tu-berlin.de/index.php?id=109406>