

Prof. Holger Stark,  
 Stefan Fruhner, Niels Majer, Maximilian Schmitt, Andreas Zöttl,  
 Christian Fräßdorf, Wassilij Kopylov, Benjamin Regler, Emely Wiegand

## 8. Übungsblatt – Theoretische Physik I: Mechanik

**Abgabe: Di. 13.12.2011 bis 8:30 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude**

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium (Tutor und Termin) an. Kreuzen Sie am Beginn des Tutoriums die mündlichen Aufgaben an, die Sie bearbeitet haben und an der Tafel vorrechnen können.

**Aufgabe 22 (20 Punkte): Tensoren (schriftlich 2+2+2+2+2+2+4+4)**

Tensoren zweiter Stufe sind "Maschinen", die aus einem Vektor  $\mathbf{a}$  einen Vektor  $\mathbf{b} = \underline{\underline{T}} \mathbf{a}$  machen. Wichtig dabei ist, dass diese Abbildung linear ist. Es gilt also:

$$\underline{\underline{T}}(p\mathbf{a} + q\mathbf{b}) = p\underline{\underline{T}} \mathbf{a} + q\underline{\underline{T}} \mathbf{b}.$$

Ein Beispiel ist der Trägheitstensor, welcher der Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  eines starren Körpers dessen Drehimpuls  $\mathbf{L}$  zuordnet; i.A. sind  $\boldsymbol{\omega}$  und  $\mathbf{L}$  nicht parallel.

- (a) Entwickeln Sie  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  nach der ONB  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  und zeigen Sie ausgehend von  $\mathbf{b} = \underline{\underline{T}} \mathbf{a}$ , dass der Tensor  $\underline{\underline{T}}$  durch Komponenten  $T_{ij}$  charakterisiert ist, die wir im Folgenden in einer Matrix  $\underline{\underline{T}}$  mit  $[\underline{\underline{T}}]_{ij} = T_{ij}$  zusammenfassen und mit demselben Symbol darstellen wie den "darstellungsfreien" Tensor  $\underline{\underline{T}}$ .
- (b) Das dyadische Produkt  $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$  macht aus zwei Vektoren  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  einen Tensor zweiter Stufe. Seine Wirkung auf den Vektor  $\mathbf{a}$  sei durch  $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\mathbf{a} = \mathbf{u}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})$  definiert, wobei "." das Skalarprodukt bezeichnet. Wie lauten die in (a) eingeführten Komponenten  $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})_{ij}$ ?
- (c) Die dyadischen Produkte  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) bilden eine ONB im Raum der Tensoren zweiter Stufe. Zeigen Sie, dass die Entwicklung  $\underline{\underline{T}} = T_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  konsistent mit der in (a) gefundenen Darstellung der  $T_{ij}$  ist.
- (d) Ein transponierter Tensor  $\underline{\underline{T}}^T$  wird über

$$\mathbf{a} \cdot \underline{\underline{T}} \mathbf{b} := \mathbf{b} \cdot \underline{\underline{T}}^T \mathbf{a}$$

eingeführt. Wie hängen die Komponenten von  $\underline{\underline{T}}^T$  mit denen von  $\underline{\underline{T}}$  zusammen?

- (e) Für einen symmetrischen Tensor zweiter Stufe gilt:  $\underline{\underline{T}}^T = \underline{\underline{T}}$  und ein antisymmetrischer Tensor erfüllt:  $\underline{\underline{T}}^T = -\underline{\underline{T}}$ . Was bedeutet das für deren Komponenten? Wieviele unabhängige Komponenten haben diese Tensoren jeweils? Zerlegen Sie einen allgemeinen Tensor zweiter Stufe in einen symmetrischen und antisymmetrischen Anteil. Führen Sie die Zerlegung explizit durch für

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

- (f) Der Einheitstensor  $\underline{\underline{1}}$  ist durch  $\mathbf{a} = \underline{\underline{1}} \mathbf{a}$  definiert. Wie lauten seine Komponenten?
- (g) Gilt  $\underline{\underline{T}} \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a}$ , so nennt man  $\mathbf{a}$  einen Eigenvektor (EV) von  $\underline{\underline{T}}$  zum Eigenwert (EW)  $\lambda$ . Zeigen Sie, dass ein symmetrischer Tensor, der nur reelle Komponenten besitzt, reelle EW  $\lambda^{(i)}$  besitzt und seine EV  $\mathbf{a}^{(i)}$  orthogonal zueinander sind. *Hinweis:* Man nehme  $\lambda^{(i)} \neq \lambda^{(j)}$ .

8. Übung TPI WS11

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

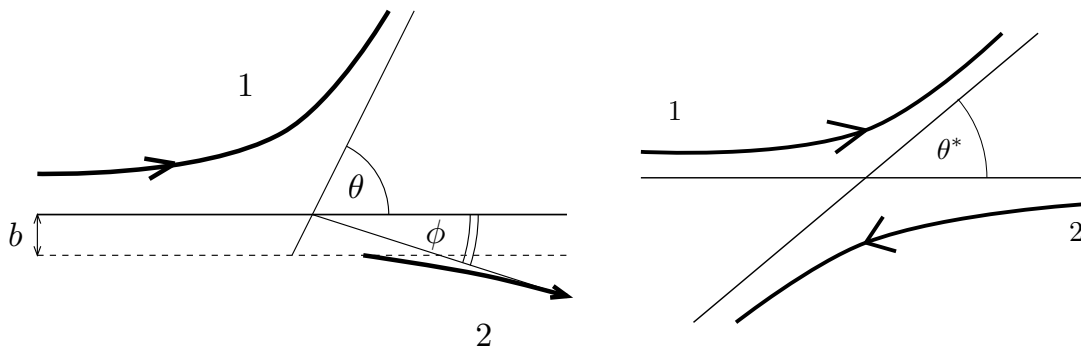
- (h) Relle, symmetrische Tensoren haben in drei Dimensionen genau 3 EV. Warum? Berechnen Sie die Komponenten von  $\underline{\underline{T}}$  bzgl. der Basis  $\{\mathbf{a}^{(i)} \otimes \mathbf{a}^{(j)}, i, j = 1, 2, 3\}$ , wobei die  $\mathbf{a}^{(i)}$  die auf Eins normierten Eigenvektoren aus (g) sind. Wenden Sie das Ergebnis auf  $\underline{\underline{B}}$  aus (g) an.

**Aufgabe (23): Elastischer Zweiteilchenstoß (mündlich)**

Betrachten Sie zwei Teilchen der Masse  $m_1$  und  $m_2$ , deren Wechselwirkung z. B. durch das kugelsymmetrische Potential  $U(r)$  (abstoßend oder anziehend) gegeben sei. Das Potential gehe im Unendlichen mindestens wie  $1/r$  gegen Null. Der Versuch wird in der Regel im Labor so ausgeführt, dass das Teilchen 2 vor dem Stoß ruht (das sog. *Target*), während Teilchen 1 (das *Projektile*) aus dem Unendlichen kommend am Targetteilchen vorbeiläuft und, ebenso wie dieses, im Unendlichen entweicht.

Diese Bewegung sieht in beiden Teilchen (Laborsystem LS) unsymmetrisch aus, da sich neben der Relativbewegung auch der Schwerpunkt weiterhin nach rechts bewegt. Legt man nun ein zweites Bezugssystem in den Schwerpunkt (Schwerpunktsystem SS) so erhält man ein symmetrisches Bild. In beiden Systemen können die Teilchen lange vor dem und lange nach dem Stoß durch ihre Impulse  $\mathbf{p}_i$  bzw. ihren Relativimpuls  $\mathbf{p}^*$  charakterisiert werden:

- im LS:  $\mathbf{p}_i$  vor und  $\mathbf{p}'_i$  nach dem Stoß,  $i = 1, 2$ ;  
 im SS:  $\mathbf{p}^*$  und  $-\mathbf{p}^*$  vor bzw.  $\mathbf{p}'^*$  und  $-\mathbf{p}'^*$  nach dem Stoß.



- (a) Formulieren Sie jeweils für das Labor- und Schwerpunktsystem mit Hilfe von Energie- und Impulserhaltung welche Zusammenhänge vor bzw. nach dem Stoß zwischen dem Gesamtimpuls  $\mathbf{P}$ , den LS-Impulsen  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  und dem Relativimpuls  $\mathbf{p}^*$  gelten.
- (b) Drücken Sie das Skalarprodukt  $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}'_1$  jeweils mit Hilfe des Streuwinkels  $\theta$  im LS bzw.  $\theta^*$  im SS aus.
- (c) Leiten Sie mit dem Ergebnis aus (b) den in der Vorlesung gezeigten Zusammenhang zwischen dem Streuwinkel  $\theta$  und  $\theta^*$  ab:

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta^*}{m_1/m_2 + \cos \theta^*}.$$

- (d) Was gilt für den Zusammenhang in den Grenzfälle von (a)  $m_1 \ll m_2$  und (b)  $m_1 = m_2$ . Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.