

Prof. Dr. Tobias Brandes  
 Dr. Clive Emary  
 Dipl. Phys. Arash Azhand  
 Dipl. Phys. Mathias Hayn

**1. Übungsblatt – Theoretische Physik V: Quantenmechanik II**

**Abgabe: Fr. 28.10.2010 11:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes**

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

**Aufgabe 1 (7 Punkte): Freie Teilchen**

Zum Zeitpunkt  $t = 0$  ist der Zustand eines freien Teilchens durch die folgende Wellenfunktion beschrieben (hier  $\hbar = 1$ ):

$$\Psi(x, t = 0) = N \exp \left\{ -\frac{x^2}{2a^2} + ip_0 x \right\},$$

wobei  $N$  ein Normierungsfaktor ist.

- a) Finden Sie die Zeitentwicklung dieses Zustandes, z. B.,  $\Psi(x, t \geq 0)$ , und der folgenden Mittelwerte:

$$\overline{x(t)}, \quad \overline{p(t)}, \quad \overline{(\Delta x(t))^2} \equiv \overline{(x - \overline{x(t)})^2}, \quad \text{und} \quad \overline{(\Delta p(t))^2} \equiv \overline{(p - \overline{p(t)})^2}.$$

- b) Beweisen Sie, dass die Breite des Wellenpaketes,  $\overline{(\Delta x(t))^2}$ , nicht beliebig klein sein kann.

**Aufgabe 2 (5 Punkte): Kontinuitätsgleichung**

Betrachten Sie die Klein-Gordon-Gleichung für ein freies Teilchen der Masse  $m_0$ . Zeigen Sie, dass die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \text{div} \mathbf{j} = 0$$

für die Stromdichte

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2m_0 i} (\psi^* \nabla \psi - (\nabla \psi)^* \psi)$$

und der Dichte

$$\rho = \frac{i\hbar}{2m_0 c^2} (\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial t} \psi^*)$$

erfüllt ist. Eine mögliche Lösung der Klein-Gordon-Gleichung für das freie Teilchen in einer Dimension ist  $\psi(x, t) = e^{i(px - Et)/\hbar}$ . Berechnen Sie hierfür  $E(p)$  und  $\rho$ .

**Aufgabe 3 (5 Punkte): Wasserstoffatom**

Betrachten Sie hier nun die Klein-Gordon-Gleichung für ein Teilchen im elektromagnetischen Feld und setzen Sie  $\mathbf{A} = 0$  und  $e\Phi = -\frac{Z\alpha}{r}$  (relativistisches Wasserstoffatom ohne Spin). Bringen Sie diese Gleichung durch Separation auf die Form

$$\left[ \left( E + \frac{Z\alpha}{r} \right)^2 + \hbar^2 c^2 \frac{d^2}{dr^2} - \hbar^2 c^2 \frac{l(l+1)}{r^2} - m_0^2 c^4 \right] \chi(r) = 0.$$

Benutzen Sie dazu die Analogie zur Herleitung des nichtrelativistischen Wasserstoffatoms um zu zeigen, dass die Energieeigenwerte wie folgt aussehen:

$$E = \frac{m_0^2 c^2}{\sqrt{1 + Z^2 \alpha^2 / n^2}}.$$

**Bitte Rückseite beachten! →**

Hierbei sind

$$n' = l' + n_r, n_r \in \mathbb{N}, n_r \geq 1,$$

und

$$l \rightarrow l' \text{ mit } l'(l' + 1) = l(l + 1) - \frac{Z^2 \alpha^2}{\hbar^2 c^2}.$$

Entwickeln Sie das Ergebnis bis zur 4. Ordnung in  $Z\alpha$  und identifizieren Sie die nichtrelativistische Korrektur.

**Aufgabe 4 (3 Punkte): Lorentzkraft**

Gegeben sei die Hamiltonfunktion  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{q}, \mathbf{p}))^2}{2m} + e\phi(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ . Leiten Sie daraus die klassische Lorentzkraft her.

- |   |   |
|---|---|
| <b>Vorlesung:</b>                       | <ul style="list-style-type: none"><li>• Dienstags 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 203.</li><li>• Donnerstags 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 203.</li></ul>   |
| <b>Tutorien:</b>                        | <ul style="list-style-type: none"><li>• Mo. 10–12 Uhr im EW 226 (Mathias Hayn).</li><li>• Do. 12–14 Uhr im EW 731 (Clive Emary).</li><li>• Fr. 12–14 Uhr im EW 229 (Arash Azhand).</li></ul>  |
| <b>Anmeldung:</b>                       | <p>Die Tutorieneinteilung, Punkteverteilung und Scheinvergabe zu der Vorlesung “Theoretische Physik V: Quantenmechanik II” erfolgt über das Moseskontosystem: <a href="https://moseskonto.tu-berlin.de/moseskonto/">https://moseskonto.tu-berlin.de/moseskonto/</a> vom 01.10.-20.10.2011 (Mitternacht).</p> <p>Eine spätere Anmeldung ist nicht möglich. Benötigt wird ein tubit Nutzerkonto. Alternativ kann ein temporärer Account im Mathematikservicezentrum MA 708 erstellt werden.</p> |
| <b>Klausur:</b>                         | <ul style="list-style-type: none"><li>• Noch nicht festgelegt.</li></ul>  |
| <b>Scheinkriterien:</b>                 | <ul style="list-style-type: none"><li>• Mindestens 50% der Übungspunkte.</li><li>• Regelmäßige und aktive Teilnahme am Tutorium.</li><li>• Bestandene Klausur.</li></ul>  |
| <b>Literatur zur Lehrveranstaltung:</b> | <ul style="list-style-type: none"><li>• W. Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 5/1 und 5/2</li><li>• W. Greiner, Theoretische Physik 6</li><li>• U. Scherz, Quantenmechanik</li><li>• S. Gasiorowicz, Quantum physics</li><li>• H. Rollnik, Quantentheorie 1 und 2</li><li>• G. Baym, Lectures on quantum mechanics</li><li>• J. J. Sakurai, Modern quantum mechanics</li><li>• R. Shankar, Principles of quantum mechanics</li><li>• E. Merzbacher, Quantum mechanics</li></ul>           |