Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Clive Emary
Dipl. Phys. Arash Azhand
Dipl. Phys. Mathias Hayn

3. Übungsblatt – Theoretische Physik V: Quantenmechanik II

Abgabe: Fr. 11.11.2011 11:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 1 (6 Punkte): *Transformation von Vektorfeldern*

In dieser Aufgabe betrachten wir das Transformationsverhalten eines Vektorfeldes $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, d.h. einer Abbildung $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, unter räumlichen Rotationen. Bei dem Vektorfeld $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ kann es sich z.B. um eine Wellenfunktion oder um das elektromagnetische Vektorpotential handeln. Wir bezeichnen die Abbildung/Matrix, welche die Drehung mit dem Winkel φ um die Achse $\mathbf{n}$ beschreibt, mit $\mathcal{R}_\mathbf{n}(\varphi)$. Ist $\mathbf{A}'(\mathbf{r})$ das Vektorfeld im gedrehten Koordinatensystem, so transformiert dieses sich gemäß

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathcal{R}_\mathbf{n}(\varphi) \cdot \mathbf{A}(\mathcal{R}_\mathbf{n}^{-1}(\varphi) \cdot \mathbf{r}). \tag{1}$$

Der Übersichtlichkeit halber betrachten wir nur Drehungen um die z-Achse

(a) Wie sieht die Drehmatrix $\mathcal{R}_z(\varphi)$ und ihre Inverse $\mathcal{R}_z^{-1}(\varphi)$ aus?

(b) Betrachten Sie nun infinitesimale Winkel $\varphi \ll 1$ und drücken Sie das Vektorfeld $\mathbf{A}'(\mathbf{r})$ im gedrehten Koordinatensystem durch das Vektorfeld $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ im nicht gedrehten Koordinatensystem mit Hilfe der Gleichung (1) aus. D.h. schreiben Sie Gleichung (1) in der Form $\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \hat{\mathcal{O}}\mathbf{A}(\mathbf{r})$, mit einem zu bestimmenden Operator $\hat{\mathcal{O}}$.

(c) Schreiben Sie den Operator $\hat{\mathcal{O}}$ als $\big[C - i\,\varphi\big(\hat{\mathcal{O}}_1 + \hat{\mathcal{O}}_2\cdot\big)\big]$, mit einer von φ unabhängigen Konstanten C, einem Differentialoperator $\hat{\mathcal{O}}_1$ und einem Operator $\hat{\mathcal{O}}_2$ ohne räumliche Ableitungen.

(d) Was ist die Bedeutung des Differentialoperators $\hat{\mathcal{O}}_1$?

*(e) Wiederholen Sie die Aufgabenteile (a) bis (c) für infinitesimale Drehungen um die x- und um die y-Achse.

*(f) Wie lautet der Ausdruck für infinitesimale Drehungen um eine beliebige Achse $\mathbf{n}$?

Aufgabe 2 (11 Punkte): *Potentialschwelle in der Dirac-Theorie*

In $(1+1)$ Dimensionen lässt sich die Dirac-Gleichung in der Form $(\hbar = c = 1)$

$$i\,\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \Big(-i\,\sigma_1\,\frac{\partial}{\partial x} + \sigma_3\,m\Big)\psi(x,t) \tag{2}$$

schreiben. Hier sind σ_1 und σ_3 Pauli-Matrizen, m ist die Masse des Teilchens und $\psi(x,t)$ ist ein zwei-komponentiger Spinor.

*(a) Leiten Sie die Dirac-Gleichung (2) her, indem Sie analog vorgehen wie in der Vorlesung für $(3+1)$ Dimensionen.

(b) Im Falle von stationären Lösungen haben die Spinoren die Form $\psi(x,t) = \mathrm{e}^{-iEt}\,\varphi(x)$. Wie lautet die dazugehörige stationäre Dirac-Gleichung für ein Teilchen in einem Potential $V(x)$?

(c) Lösen Sie für ein konstantes Potential $V(x) = V$ diese Dirac-Gleichung im Impulsraum und zeigen Sie damit, dass ebene Wellen mit dem Impuls k der Form

$$\varphi(x) \sim \begin{pmatrix} E - V + m \\ k \end{pmatrix} \mathrm{e}^{ikx} \tag{3}$$

die stationäre Dirac-Gleichung im Ortsraum erfüllen. Wie sieht k aus? Ist k immer reell? Was bedeutet dies für die Lösung $\varphi(x)$?

(d) Betrachten Sie nun ein Elektron mit der Energie E in einem stückweise konstanten Potential der Form $V(x) = 0, x < 0$ und $V(x) = V, x \geq 0$. Benutzen Sie Aufgabenteil (c) um die Form der einfallenden (φ_e), die an der Potentialschwelle reflektierten (φ_r) und die die Potentialschwelle durchdringende (φ_t) Welle zu bestimmen. Was gilt für die Spinoren an der Grenzfläche $x = 0$? Leiten Sie daraus Bedingungen für die Koeffizienten der drei Wellen ab.

(e) Der Strom j ist allgemein durch $j = \varphi(x)^\dagger \cdot \sigma_1 \cdot \varphi(x)$ definiert. Bestimmen Sie den Strom für die einfallende (j_e), die reflektierte (j_r) und die durchgehende (j_t) Welle.

(f) Bestimmen Sie den Reflexionskoeffizienten $R = -j_r/j_e$ und den Transmissionskoeffizienten $T = 1 - R$ im Grenzfall $E \gg V, m$.

(g) Was passiert mit dem Impuls der Welle φ_t für den Fall, dass $V + m > E > V - m$? Was bedeutet das physikalisch? Wie sehen R und T hier aus?

(h) Was passiert mit dem Impuls der Welle φ_t für den Fall, dass $E < V - m$? Was bedeutet das physikalisch?

Aufgabe 3 (6 Punkte): *Zitterbewegung*

Betrachten Sie in dieser Aufgabe wieder die Dirac-Gleichung (2) in $(1+1)$ Dimensionen aus der vorherigen Aufgabe mit $m = 1$.

(a) Lösen Sie die Dirac-Gleichung (2) z. B. durch numerische Integration, für $\psi(x,t)$, mit dem Anfangswert

$$\psi(x,0) = \left(\frac{1}{32\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{x^2}{16}\right) u_A; \quad u_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für den Spinor.

(b) Zeichnen Sie für $-15 < x, t < 15$ die Wahrscheinlichkeitsdichte $w(x,t) \equiv \psi(x,t)^\dagger \cdot \psi(x,t)$.

(c) Zeichnen Sie den Erwartungswert der Position des Elektrons für den gleichen Zeitraum.

(d) Wiederholen Sie die Aufgabenteile (a) bis (c) mit dem Spinor $u_A \to u_B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ als Anfangswert.

(e) Diskutieren Sie die Ergebnisse.