Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Clive Emary
Dipl. Phys. Arash Azhand
Dipl. Phys. Mathias Hayn

4. Übungsblatt – Theoretische Physik V: Quantenmechanik II

Abgabe: Fr. 18.11.2011 11:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 11 (15 Punkte): *Grundlagen des gebrochenzahligen Quanten-Hall-Effekts*

Für die Erforschung des gebrochenzahligen Quanten-Hall-Effekts (FQHE) bekamen Störmer und Tsui (Experiment) und Laughlin (Theorie) 1998 den Nobelpreis für Physik. Der FQHE ist eine Anomalie im Transportverhalten eines zweidimensionalen Elektronengases (z.B. in der $x{-}y$-Ebene) in einem starken Magnetfeld (z.B. $\mathbf{B} = B\,\mathbf{e}_z$). Wir behandeln ein einzelnes Elektron der Masse m^* in der 'symmetrischen Eichung' für das Vektorpotential $\mathbf{A}$, die Laughlin benutzt hat, um seine Vielteilchenwellenfunktion $|m\rangle$ zum Füllfaktor $1/m,\ m = 3, 5, 7, \ldots$ zu konstruieren. Wir betrachten den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{1}{2\,m^*}\Big(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\,\mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}})\Big)^2. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass der Hamilton-Operator (1) sich in der Form

$$\hat{H} = \frac{1}{2\,m^*\,l^2}(\hat{\beta}^\dagger\,\hat{\beta} + \hat{\alpha}^\dagger\,\hat{\alpha} - s\,\hat{L}_z) \tag{2}$$

schreiben lässt, wobei die Operatoren über

$$\hat{\alpha} := \frac{1}{2\,l}(\hat{x} + i\,s\,\hat{y}), \qquad \hat{\beta} := l\,(i\,\hat{p}_x - s\,\hat{p}_y), \tag{3}$$

$$s := e\,B/|e\,B|, \qquad l := \sqrt{c/|e\,B|} \tag{4}$$

$$\hat{L}_z := \hat{x}\,\hat{p}_y - \hat{y}\,\hat{p}_x \tag{5}$$

definiert sind. Hierbei und im Folgenden wird $\hbar = 1$ gesetzt.

(b) Drücken Sie die z-Komponente $\hat{L}_z$ des Drehimpulses aus Gleichung (5) allein durch die Operatoren $\hat{\alpha}, \hat{\alpha}^\dagger, \hat{\beta}$ und $\hat{\beta}^\dagger$ aus.

(c) Berechnen Sie die Kommutatoren $[\hat{\alpha}, \hat{\beta}], [\hat{\alpha}^\dagger, \hat{\beta}], [\hat{\alpha}, \hat{\alpha}^\dagger]$ und $[\hat{\beta}, \hat{\beta}^\dagger]$.

(d) Zeigen Sie mit Hilfe der Aufgabenteile (b) und (c), dass sich der Hamilton-Operator durch

$$\hat{H} = \frac{\omega_c}{2}\Big((\hat{\alpha}^\dagger + \hat{\beta}^\dagger)(\hat{\alpha} + \hat{\beta}) + 1\Big) \tag{6}$$

ausdrücken lässt. Hier tritt die Zyklotronfrequenz $\omega_c := \frac{|e\,B|}{m^*\,c}$ auf.

(e) Führen Sie den Operator

$$\hat{a} := \sqrt{\frac{1}{2}}(\hat{\alpha} + \hat{\beta}) \tag{7}$$

ein und zeigen Sie, dass $\hat{a}$ ein Absteige-Operator eines Harmonischen Oszillators ist, d.h., zeigen Sie, $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$.

Zeigen Sie außerdem, dass sich der Hamilton-Operator ausschließlich durch $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ ausdrücken lässt.

(f) Definieren Sie zusätzlich den Operator $\hat{b} := \sqrt{\frac{1}{2}}(\hat{\alpha}^\dagger - \hat{\beta}^\dagger)$ und zeigen Sie, dass es sich bei diesem ebenfalls um einen Absteige-Operator handelt. Berechnen Sie außerdem die Kommutatoren $[\hat{a}, \hat{b}]$ und $[\hat{a}, \hat{b}^\dagger]$.

(g) Drücken Sie nun die z-Komponente $\hat{L}_z$ des Drehimpulses durch die Operatoren $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{b}^\dagger$ aus. Zeigen Sie damit und dem Ergebnis aus Aufgabenteil (e), dass $\hat{L}_z$ eine Erhaltungsgröße ist.

Aufgabe 12 (5 Punkte): *Singlet- und Triplet-Zustände*

Bestimmen Sie die Clebsch–Gordan-Koeffizienten für ein System bestehend aus zwei Spin-$1/2$-Teilchen und zeigen Sie, dass gilt

$$|j=1, m=1\rangle = \left|m_1 = \frac{1}{2}, m_2 = \frac{1}{2}\right\rangle, \tag{8}$$

$$|j=1, m=0\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\left|m_1 = \frac{1}{2}, m_2 = -\frac{1}{2}\right\rangle + \left|m_1 = -\frac{1}{2}, m_2 = \frac{1}{2}\right\rangle\right), \tag{9}$$

$$|j=1, m=-1\rangle = \left|m_1 = -\frac{1}{2}, m_2 = -\frac{1}{2}\right\rangle, \tag{10}$$

$$|j=0, m=0\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\left|m_1 = \frac{1}{2}, m_2 = -\frac{1}{2}\right\rangle - \left|m_1 = -\frac{1}{2}, m_2 = \frac{1}{2}\right\rangle\right). \tag{11}$$

Bestimmen Sie die Energie dieser vier Zustände für einen Hamilton-Operator der Form $\hat{H} = V_0\,\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2$. Hier soll $\hbar = 1$ und $\hat{\mathbf{S}}_i$ der Spin-Operator des i-ten Teilchens sein.