Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Clive Emary
Dipl. Phys. Arash Azhand
Dipl. Phys. Mathias Hayn

6. Übungsblatt – Theoretische Physik V: Quantenmechanik II

Abgabe: Fr. 2.12.2011 11:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 15 (15 Punkte): *Gequetschte Zustände*

Hier wird ein System von zwei gekoppelten harmonischen Oszillatoren betrachtet. Dabei sei Oszillatorsystem A beschrieben durch die Erzeuger- und Vernichteroperatoren $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$ und Oszillatorsystem B durch $\hat{b}^\dagger, \hat{b}$, mit den kanonischen Kommutatorrelationen,

$$\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = \left[\hat{b}, \hat{b}^\dagger\right] = 1, \text{ und } \left[\hat{a}, \hat{b}\right] = \left[\hat{a}, \hat{b}^\dagger\right] = 0. \tag{1}$$

Der zugehörige Hamiltonoperator lautet dann:

$$\hat{H} = \omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_b \hat{b}^\dagger \hat{b} + g\left(\hat{b}^\dagger \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{b}\right), \tag{2}$$

mit dem Kopplunskoeffizienten g.

(a) Benutzen Sie die unitäre Transformation

$$\hat{U} = \exp\left[\alpha \hat{b}^\dagger \hat{a} - \alpha^* \hat{a}^\dagger \hat{b}\right], \tag{3}$$

um den Hamiltonoperator auf Diagonalform zu bringen.

(a1) Berechnen Sie zunächst $\hat{\tilde{a}} \equiv \hat{U}^\dagger \hat{a} \hat{U}$ und analog $\hat{\tilde{b}}$, $\hat{\tilde{a}}^\dagger$ und $\hat{\tilde{b}}^\dagger$.

(a2) Zeigen Sie, dass die so transformierten Erzeuger- und Vernichteroperatoren auch kanonische Kommutatorrelationen erfüllen.

(a3) Zeigen Sie, dass die ursprünglichen Erzeuger- und Vernichteroperatoren in Abhängigkeit von den Transformierten die folgende Form besitzen:

$$\hat{a}^\dagger = \cos(|\alpha|)\,\hat{\tilde{a}}^\dagger + \frac{\alpha}{|\alpha|}\sin(|\alpha|)\,\hat{\tilde{b}}^\dagger, \qquad \hat{a} = \cos(|\alpha|)\,\hat{\tilde{a}} + \frac{\alpha^*}{|\alpha|}\sin(|\alpha|)\,\hat{\tilde{b}}, \tag{4}$$

$$\hat{b}^\dagger = \cos(|\alpha|)\,\hat{\tilde{b}}^\dagger - \frac{\alpha^*}{|\alpha|}\sin(|\alpha|)\,\hat{\tilde{a}}^\dagger, \qquad \hat{b} = \cos(|\alpha|)\,\hat{\tilde{b}} - \frac{\alpha}{|\alpha|}\sin(|\alpha|)\,\hat{\tilde{a}}. \tag{5}$$

(a4) Schreiben Sie $\hat{H}$ mit Hilfe der transformierten Operatoren um. Unter welcher Bedingung besitzt $\hat{H}$ Diagonalform?

(b) Man kann einen Ortsoperator definieren,

$$\hat{X} \propto \left(\hat{a}^\dagger + \hat{a} + \hat{b}^\dagger + \hat{b}\right). \tag{6}$$

Berechnen Sie für diesen den Erwartungswert und die Varianz im Vakuumzustand $|0,0\rangle \equiv |\tilde{n}_a = 0, \tilde{n}_b = 0\rangle$ der Operatoren $\hat{\tilde{a}}$ und $\hat{\tilde{b}}$.
Hinweis: $\hat{\tilde{a}}|0,0\rangle = \hat{\tilde{b}}|0,0\rangle = 0$.

Aufgabe 16 (5 Punkte): *Fermionen auf dem Gitter*

Wir betrachten ein System bestehend aus nicht-wechselwirkenden Fermionen auf einem eindimensionalem Gitter. Dieses hat M Gitterplätze und der $(M+1)$-te Gitterplatz wird wieder mit dem ersten Gitterplatz identifiziert (periodische Randbedingungen). Die Gitterkonstante wird mit a bezeichnet. Der Hamilton-Operator eines solchen Systems ist z.B. durch

$$\hat{H} = -t \sum_{j,\sigma} \big(\hat{c}^{\dagger}_{x_j,\sigma}\, \hat{c}_{x_{j+1},\sigma} + \hat{c}^{\dagger}_{x_{j+1},\sigma}\, \hat{c}_{x_j,\sigma} \big) - \mu \sum_{j,\sigma} \hat{c}^{\dagger}_{x_j,\sigma}\, \hat{c}_{x_j,\sigma} \tag{7}$$

gegeben. Hier erstrecken sich die Summen über die Spin-Konfigurationen $\sigma = \pm\frac{1}{2}$ und über alle Gitterplätze $x_j = j\,a$, mit $j = 1, 2, \ldots, M$. Die Operatoren $\hat{c}_{x_j,\sigma}$, $\hat{c}^{\dagger}_{x_j,\sigma}$ vernichten, bzw. erzeugen ein Fermion mit der Spineinstellung σ am j-ten Gitterplatz. Damit genügen die $\hat{c}_{x_j,\sigma}$, $\hat{c}^{\dagger}_{x_j,\sigma}$ kanonischen Antikommutator-Relationen, $\{\hat{c}_{x_i,\sigma}, \hat{c}^{\dagger}_{x_j,\sigma'}\} = \delta_{i,j}\,\delta_{\sigma,\sigma'}, \{\hat{c}_{x_i,\sigma}, \hat{c}_{x_j,\sigma'}\} = 0$.

(a) Transformieren Sie die Operatoren $\hat{c}_{x_j,\sigma}$ in den Impulsraum. Dazu müssen Sie zunächst zeigen, dass die ebenen Wellen

$$u_{q_n}(x_j) = \sqrt{\frac{1}{M}}\mathrm{e}^{-iq_n\,x_j}$$

mit dem Gitterimpuls $q_n = \frac{2\pi}{a\,M}(-\frac{M}{2} + n)$ $(n = 1, 2, \ldots, M)$ auf dem Gitter sowohl orthonormal, als auch vollständig sind.

(b) Transformieren Sie schließlich den Hamilton-Operator (7) in den Impulsraum und zeigen Sie, dass dieser dann diagonal ist

$$\hat{H} = \sum_{n=1}^{M} (\varepsilon_{q_n} - \mu)\hat{c}^{\dagger}_{q_n,\sigma}\, \hat{c}_{q_n,\sigma}.$$

Wie lautet die Dispersionsrelation ε_{q_n}? Zeichnen Sie diese für Gitter mit $M = 3, 10$ und 100 Gitterplätzen.