Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Clive Emary
Dipl. Phys. Arash Azhand
Dipl. Phys. Mathias Hayn

8. Übungsblatt – Theoretische Physik V: Quantenmechanik II

Abgabe: Fr. 16.12.2011 11:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 21 (6 Punkte): *Einfaches Ladungsmodell für einen Quantenpunkt*

Wir betrachten die Hartree-Fock-Gleichungen für N Elektronen in einem Quantenpunkt, der die Einteilchen-Eigenenergien E_i habe. Wir betrachten ein extrem vereinfachtes Modell, in dem die Wechselwirkung zwischen den Elektronen konstant ist, U=const.

(a) Lösen Sie die Hartree-Fock-Gleichungen. **Hinweis:** Ausnutzen der Orthogonalität der ψ_i.

(b) Berechnen Sie damit die Hartree-Fock-Grundzustandsenergie für N Elektronen im Quantendot, und diskutieren Sie das Ergebnis.

(c) Wir betrachten nun $N = 2$ Elektronen mit dem HF-Ansatz für die Einteilchen-Wellenfunktionen

$$\psi_{\nu_1}(\mathbf{r}, \sigma) = \psi(\mathbf{r})|\uparrow\rangle, \quad \psi_{\nu_2}(\mathbf{r}, \sigma) = \psi(\mathbf{r})|\downarrow\rangle. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass die HF-Selbstkonsistenzgleichung die Form einer Gross-Pitaevskii-Gleichung hat,

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}'|\psi(\mathbf{r}')|^2 U(|r - r'|)\right]\psi(\mathbf{r}) = \varepsilon\psi(\mathbf{r}). \tag{2}$$

Aufgabe 22 (6 Punkte): *Symmetrisierung der Zustände*

Betrachten Sie ein System bestehend aus einem Elektron auf der Erde und einem Elektron auf dem Mond, welche sich in einem Spin-Singulett Zustand $|\psi_\mathsf{S}\rangle = N\big(|\varphi_\mathsf{E}, \varphi_\mathsf{M}\rangle + |\varphi_\mathsf{M}, \varphi_\mathsf{E}\rangle\big) \otimes \big(|\uparrow, \downarrow\rangle - |\downarrow, \uparrow\rangle\big)$ befinden. Hierbei bezeichnet $|\varphi_\mathsf{E}\rangle$ ($|\varphi_\mathsf{M}\rangle$) einen Ein-Teilchen-Zustand, welcher im Ortsraum an einem Ort auf der Erde (dem Mond) lokalisiert ist. Diese Zustände sind im Allgemeinen nicht orthogonal.

(a) Bestimmen Sie zunächst die Normierungskonstante N. Hier tritt das Überlapp-Integral $\ell = \int \mathrm{d}\mathbf{x}^3\, \varphi_\mathsf{E}^*(\mathbf{x})\, \varphi_\mathsf{M}(\mathbf{x})$ mit $|\ell| \geq 0$ auf.

(b) Berechnen Sie die reduzierte Dichtematrix $\hat{\varrho}_1$ für das Elektron auf der Erde.

(c) Zeigen Sie, dass sich die reduzierte Dichtematrix im Ortsraum $\varrho_1(\mathbf{x}\,\sigma, \mathbf{x}'\,\sigma') = \langle \mathbf{x}\,\sigma|\,\hat{\varrho}_1\,|\mathbf{x}'\,\sigma'\rangle$ in einen Orts- und in einen Spinanteil aufteilen lässt, $\varrho_1(\mathbf{x}\,\sigma, \mathbf{x}'\,\sigma') = \varrho_1^{(x)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\,\varrho_1^{(\sigma)}(\sigma, \sigma')$, und bestimmen sie beide Anteile.

(d) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit einem nicht-antisymmetrisierten „Singulett-Zustand" $|\psi\rangle = |\varphi_\mathsf{E}\uparrow, \varphi_\mathsf{M}\downarrow\rangle - |\varphi_\mathsf{E}\downarrow, \varphi_\mathsf{M}\uparrow\rangle$ und diskutieren Sie, inwieweit die Entfernung der beiden Elektronen eine Rolle für die Antisymmetrisierung des Zwei-Teilchen-Zustandes spielt.

8. Übung TPV WS11/12

Aufgabe 23 (8 Punkte): *Single-mode squeezing*

Let a and $a^\dagger$ be annihilation and creation operators for a single bosonic mode such that $\left[a, a^\dagger\right] = 1$. The vacuum state of this mode is defined via $a\,|0\rangle = 0$. In this problem we consider the squeezed vacuum $|\xi\rangle = S(\xi)\,|0\rangle$ obtained from the original vacuum through the action of the squeezing operator $S(\xi) = \exp\left[\frac{1}{2}\xi^* a^2 - \frac{1}{2}\xi {a^\dagger}^2\right]$ with complex squeezing parameter $\xi = se^{i\theta}$.

(a) Find operator $\tilde{a}$, expressed in terms of a and $a^\dagger$, such that $\tilde{a}\,|\xi\rangle = 0$ and $\left[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger\right] = 1$.

(b) Find a nontrivial Hamiltonian, again in terms of a and $a^\dagger$, which has $|\xi\rangle$ as ground state.

(c) Calculate the mean photon number in the squeezed vacuum state, $\langle \hat{n} \rangle = \langle \xi |\, a^\dagger a\, | \xi \rangle$, as well as the expectation values of the position and momentum operators $x = (2\omega)^{-1/2}(a^\dagger + a)$ and $p = i(\omega/2)^{1/2}(a^\dagger - a)$ $(\hbar = m = 1)$.

(d) Show that the coordinate variance in this state can be written as

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \frac{1}{2\omega}\left[e^{2s}\sin^2\frac{\theta}{2} + e^{-2s}\cos^2\frac{\theta}{2}\right] \tag{3}$$

and find a similar expression for $\langle (\Delta p)^2 \rangle$. Discuss these results with reference to the Heisenberg uncertainty principle.