Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Clive Emary
Dipl. Phys. Arash Azhand
Dipl. Phys. Mathias Hayn

10. Übungsblatt – Theoretische Physik V: Quantenmechanik II

Abgabe: Fr. 13.01.2012 11:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 27 (5 Punkte): *Green'sche Funktionen und Störungstheorie*

Wir betrachten hier den klassischen Fall einer Separation des Ein-Teilchen-Hamiltonians H in einem ungestörten Anteil H_0 und einer Störung H_1. Für H_0 nehme man den einfachen Freie-Teilchen-Hamiltonian,

$$\langle \mathbf{r}|H_0|\mathbf{r'}\rangle = \frac{p^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2, \tag{1}$$

und als Störung

$$H_1 = V(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r'}), \tag{2}$$

mit einem flachen Potentialansatz,

$$V(\mathbf{r}) = \begin{cases} -V_0, & \text{für } \mathbf{r} \text{ innerhalb } \Omega_0 \\ 0, & \text{für } \mathbf{r} \text{ ausserhalb } \Omega_0, \end{cases} \tag{3}$$

wobei Ω_0 eine endliche Region in $\mathbb{R}^d$ (d: Raumdimension) ist und V_0 positiv und sehr klein: $V_0 \to 0^+$. Die mit H korrespondierende Green'sche Funktion ist gegeben durch

$$G = G_0 + G_0 H_1 G_0 + G_0 H_1 G_0 H_1 G_0 + \cdots \tag{4}$$

Hier ist G_0 die mit H_0 assoziierte Green'sche Funktion.

(a) Bestimmen Sie für den 1D-Fall die Green'sche Funktion $G = G(E)$ und zeigen Sie, dass E_0 als ein diskretes Energieniveau durch die analytische Formel

$$E_0 = \frac{m\Omega_0^2 V_0^2}{2\hbar^2} \tag{5}$$

gegeben ist

(b) Für den 3D-Fall existieren keine diskreten Energieniveaus. Zeigen Sie argumentativ, warum das der Fall ist.

Aufgabe 28 (4 Punkte): *Streumatrix*

Zeigen Sie, dass die Streumatrix S für den Hamilton-Operator $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(\hat{x})$ in einer Dimension nicht nur unitär, sondern auch symmetrisch ist. Was folgt daraus für den Transmissionskoeffizienten?

Bitte Rückseite beachten!⟶

Hinweis: Benutzten Sie die asymptotische Form der Streuzustände und die Zeitumkehrinvarianz der Schrödingergleichung für diesen Hamilton-Operator.
Zeigen Sie außerdem, dass die Streumatrix für eine Potentialstufe $V(x) = V\Theta(x)$, mit $V > 0$ für Energien $0 < E < V$ ein Skalar mit Betrag eins ist. Berechnen Sie die Streumatrix und diskutieren Sie den zugehörigen Streuzustand.

Aufgabe 29 (2 Punkte): *Streuung am Delta-Potential*

Berechnen Sie mit Hilfe der Lippmann–Schwinger-Gleichung in einer Raumdimension die Streuung einer ebenen Welle an dem singulären Potential $V(x) = g\,\delta(x)$.

Aufgabe 30 (5 Punkte): *Zeitabhängige Störungstheorie*

Betrachten Sie einen eindimensionalen harmonischen Oszillator der Frequenz ω_0, welcher für Zeiten $t < 0$ in seinem Grundzustand ist. Für Zeiten $t \geq 0$ wird der Oszillator durch eine harmonische Kraft

$$F(t) = F_0 \cos\omega t \tag{6}$$

angetrieben. Die Stärke F_0 und die Frequenz ω sind dabei konstant. Behandeln Sie diesen Antrieb störungstheoretisch und berechnen Sie die Auslenkung $\langle\hat{x}(t)\rangle$ mit Hilfe der ersten Ordnung der zeitabhängigen Störungstheorie. Diskutieren Sie Ihr Ergebnis.