Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Clive Emary
Dipl. Phys. Arash Azhand
Dipl. Phys. Mathias Hayn

11. Übungsblatt – Theoretische Physik V: Quantenmechanik II

Abgabe: Fr. 20.01.2012 11:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 31 (7 Punkte): *Streuung an der harten Kugel*

Wir betrachten hier das Modell der harten Kugel,

$$V(r) = \begin{cases} \infty & \text{für}\, r \leq R_0 \\ 0 & \text{für}\, r > R_0 \end{cases} \tag{1}$$

Dabei ist R_0 der Radius der Kugel. Die zu bestimmende Wellenfunktion hat somit die Randbedingung

$$\phi(\mathbf{r}) \equiv 0 \;\text{ für }\; r \leq R_0$$

zu erfüllen. Es empfiehlt sich der Ansatz

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} R_l(r) P_l(\cos\vartheta). \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie, dass der Wirkungsquerschnitt für die Streuung an der harten Kugel gegeben ist durch

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \frac{j_l^2(kR_0)}{n_l^2(kR_0) + j_l^2(kR_0)}. \tag{3}$$

Dabei sind j_l und n_l sphärische Bessel- und von Neumann-Funktionen.

(b) Diskutieren Sie für σ die Grenzfälle (1) $kR_0 \ll 1$ und (2) $kR_0 \gg 1$.

Aufgabe 32 (10 Punkte): *Streu- und Resonanztheorie in 1D*

Wie in der Vorlesung untersuchen wir in dieser Aufgabe die eindimensionale Streuung einer von rechts einfallenden ebenen Welle an einem δ-Potential im Halbraum. Der Hamilton-Operator dieses System lautet:

$$H(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x), \quad \text{mit } V(x) = \begin{cases} \infty & : x \leq 0, \\ c\,\delta(x-a) & : x \geq 0. \end{cases}, \quad a > 0. \tag{4}$$

Rechnen Sie im Folgenden mit $\hbar^2/2m = 1$ (Welche Einheit hat dann die Konstante c?).

(a) Auf Grund der Randbedingungen bietet sich der (nicht normierte) Ansatz

$$\psi(x) = \begin{cases} A\,\sin(kx) & : x \leq a, \\ \mathrm{e}^{-ik(x-a)} + S\,\mathrm{e}^{ik(x-a)} & : x \geq a \end{cases} \tag{5}$$

für die Wellenfunktion an. Benutzen Sie, dass die Wellenfunktion stetig, ihre Ableitung jedoch unstetig ist, um die Koeffizienten $A = A(ka)$ und $S = S(ka)$ zu bestimmen.

(b) Zeichnen Sie die Amplitude $|A(ka)|^2$ für verschiedene Werte von $c\,a$.

(c) Diskutieren Sie die Grenzfälle $c\,a \to 0$ und $c\,a \to \infty$. Untersuchen Sie dazu insbesondere das Verhalten der Wellenfunktion.

(d) Die unitäre „Streumatrix" $S(ka)$ kann durch die reelle Streuphase $\delta(ka)$ gemäß $S(ka) = -\exp[i2\delta(ka)]$ ausgedrückt werden. Zeigen Sie damit, dass die Streuphase die Gleichung

$$\tan[\delta(ka)] = \frac{\tan(ka)}{1 + \frac{c\,a}{ka}\tan(ka)} \tag{6}$$

erfüllt. Zeichnen Sie diesen Ausdruck für $c\,a = 0, 1, 10$. Wo liegen für große $c\,a$ ungefähr die Polstellen dieser Funktion?

(e) Bestimmen Sie nun für große $c\,a$ explizit die Polstellen $k_\delta a$ von $\tan[\delta(ka)]$ bis zur Ordnung α^2 mit $\alpha^{-1} = c\,a$. Tipp: Entwickeln Sie die gesuchte Polstelle, $k_\delta a = n\pi + \varepsilon$, wobei $\varepsilon = \mathcal{O}(\alpha), \alpha \ll 1$. Noch ein Tipp: Schreiben Sie ε als Potenzreihe in α und lösen Sie die so erhaltene Gleichung Ordnung für Ordnung in α.

*(f) (*2 Punkte*) Zeigen Sie, dass die Maxima (die Resonanzen) der Amplitude $|A(ka)|^2$ bis zur Ordnung α^2 mit den Polstellen $k_\delta a$ aus Aufgabenteil (e) übereinstimmen.

Aufgabe 33 (3 Punkte): *Bornsche Näherung*

Berechnen sie im Rahmen der Bornschen Näherung die Streuamplitude $f(q)$, mit $q = 2k\sin(\theta/2)$, für die Streuung eines Teilchens am Potential $V(r) = \frac{2V_0}{a\sqrt{\pi}}\exp[-(r/a)^2]$. Zeichnen Sie den differentiellen Streuquerschnitt $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$ als Funktion des Polarwinkels θ für verschiedene Werte von ka (z.B. $ka = 1, 10$). Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse.