Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Clive Emary
Dipl. Phys. Arash Azhand
Dipl. Phys. Mathias Hayn

12. Übungsblatt – Theoretische Physik V: Quantenmechanik II

Abgabe: Fr. 27.01.2012 11:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 34 (9 Punkte): *Spontaneous emission*
Consider the following model of a two-level atom interacting with a photonic bath in the rotating-wave approximation (RWA)

$$\mathcal{H}_{\rm RWA} = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \sum_k \hbar\omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \sum_k (g_k \hat{a}_k \sigma_+ + g_k^* \hat{a}_k^\dagger \sigma_-). \qquad (1)$$

The inital state of the system is the superposition $|\Psi(0)\rangle = [\alpha(0)\,|\uparrow\rangle + \beta(0)\,|\downarrow\rangle] \otimes |0\rangle$; with $|\alpha(0)|^2 + |\beta(0)|^2 = 1$.

(a) In the Born approximation, the wavefunction of the system at later times $t > 0$ in the interaction picture is approximated as

$$|\tilde{\Psi}(t)\rangle \approx |\psi(t)\rangle = \alpha(t)\,|\uparrow\rangle \otimes |0\rangle + \beta(t)\,|\downarrow\rangle \otimes |0\rangle + \sum_k \alpha_k(t)\,|\downarrow\rangle \otimes a_k^\dagger\,|0\rangle\,. \qquad (2)$$

Derive and solve differential equations for $\alpha(t)$, $\beta(t)$, und $\alpha_k(t)$ from the time-dependent Schrödinger equation. To obtain a simple answer introduce the rate $\Gamma(\epsilon) = 2\pi \sum_k |g_k|^2 \delta(\omega_k - \epsilon)$, assumed to be constant in the energy-regime of interest, and employ the Markov approximation.

(b) Evaluate consistently with the above approximations the sum $\sum_k |\alpha_k(t)|^2$. Use your result to show that the state remains normalised at all times.

(c) Calculate the time-dependent expectation values $\langle\sigma_\nu(t)\rangle$, $\nu = x, y, z$. Show that, in the long-time limit, they behave as $\langle\sigma_z(t)\rangle + 1 \sim e^{-t/T_1}$, $\langle\sigma_x(t)\rangle \sim e^{-t/T_2}$, $\langle\sigma_y(t)\rangle \sim e^{-t/T_2}$, and determine the T_1- and T_2-times.

(d) Without the RWA, our model Hamiltonian reads

$$\mathcal{H}_{\rm two-level} = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \sum_k \hbar\omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \sum_k \sigma_x (g_k \hat{a}_k + g_k^* \hat{a}_k^\dagger). \qquad (3)$$

Write this Hamiltonian in the interaction picture with $H_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \sum_k \hbar\omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$.

(e) Show that an Ansatz of the form Eq. (2) does not lead to a closed set of equations for the expansion coefficients $\alpha(t), \beta(t), \alpha_k(t)$.

Bitte Rückseite beachten!⟶

Aufgabe 35 (8 Punkte): *Jaynes–Cummings und Rabi Modelle*

Der Hamilton-Operator des Rabi-Modells und der der zugehörigen Drehwellen-Variante lauten

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\text{Rabi}} &= \mathcal{H}_0 + g\sigma_x(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), && (4)\\
\mathcal{H}_{\text{Jaynes-Cummings}} &= \mathcal{H}_0 + g(\sigma_+\hat{a} + \sigma_-\hat{a}^\dagger), \quad \text{mit} && (5)\\
\mathcal{H}_0 &= \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}. && (6)
\end{aligned}
$$

(a) Berechnen Sie die Matrixdarstellungen von $\mathcal{H}_{\text{Rabi}}$ und $\mathcal{H}_{\text{Jaynes-Cummings}}$ in der Basis $|i\rangle \otimes |n\rangle_{\text{ph}}$, $i = 1, 2$, wobei $\sigma_z |1\rangle = -|1\rangle$, $\sigma_z |2\rangle = |2\rangle$, $\sigma_+ = |2\rangle\langle 1|$, $\sigma_- = \sigma_+^\dagger$ und die $|n\rangle_{\text{ph}}$ Photonen-Fock-Zustände sind.

(b) Zeigen Sie, dass sich $\mathcal{H}_{\text{Jaynes-Cummings}}$ diagonalisieren lässt, in dem man ein 2×2 Eigenwertproblem löst. Berechnen Sie die Eigenzustände (Die sogenannten *'Dressed states'* in der Terminologie von Cohen-Tannoudji et al.) und die zugehörigen Eigenwerte.

(c) Berechnen Sie die Grundzustandsenergie von $\mathcal{H}_{\text{Rabi}}$ in zweiter Ordnung Störungstheorie in der Kopplungskonstanten g.

Wir definieren den Teilchenzahl-Operator $\hat{N}_{\text{ex}}$ für die Anregungen aus dem Grundzustand und den Paritätsoperator $\hat{\Pi}$ über

$$\hat{N}_{\text{ex}} \equiv a^\dagger a + \frac{1}{2}\sigma_z + \frac{1}{2}, \quad \hat{\Pi} \equiv e^{i\pi\hat{N}_{\text{ex}}}. \tag{7}$$

(d) Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}_{\text{Jaynes-Cummings}}$ mit $\hat{N}_{\text{ex}}$ *und* $\hat{\Pi}$ kommutiert, $\mathcal{H}_{\text{Rabi}}$ jedoch *nur* mit $\hat{\Pi}$.

(e) Interpretieren Sie das Ergebnis aus Aufgabenteil (d), indem Sie die Zustände $|i\rangle \otimes |n\rangle_{\text{ph}}$ aus Teilaufgabe (a) als Knoten und die Übergänge zwischen diesen Zuständen, welche durch den jeweiligen Hamilton-Operator, $\mathcal{H}_{\text{Rabi}}$, bzw. $\mathcal{H}_{\text{Jaynes-Cummings}}$, induziert werden, als Kanten darstellen. Stellen Sie die beiden Hamilton-Operatoren somit als Netzwerk dar.