Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Clive Emary
Dipl. Phys. Arash Azhand
Dipl. Phys. Mathias Hayn

2. Übungsblatt – Theoretische Physik V: Quantenmechanik II

Abgabe: Fr. 04.11.2011 11:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 5 (5 Punkte): *Pauli-Matrices; kinetic momentum*

1. Show that the product of two Pauli matrices,
$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
is given by $\sigma_i \sigma_j = i\epsilon_{ijk}\sigma_k + \delta_{ij}\mathbb{1}$. Calculate the commutator $[\sigma_j, \sigma_k]$, and anti-commutator $\{\sigma_i, \sigma_j\}$.

2. With vector of Pauli matrices, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, and arbitrary vectors of operators $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$, $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$, which commute with Pauli matrices, prove the identity
$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\ \mathbb{1} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

3. With $\mathbf{p} = \frac{\hbar}{i}\nabla$ and $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$, show that$(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \times (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) = -\frac{e\hbar}{i}\text{rot}\mathbf{A} = -\frac{e\hbar}{i}\mathbf{B}$,

Aufgabe 6 (10 Punkte): *Lorentzinvarianz*
Wir betrachten im Folgenden die Invarianz unter Lorentztransformationen, wobei wir uns o.B.d.A. auf Transformationen bzgl. der Raumachse 1 (x-Achse) beschränken:

$$L = \begin{pmatrix} \overline{\gamma} & -\beta\overline{\gamma} & 0 & 0 \\ -\beta\overline{\gamma} & \overline{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $\beta = v/c$ und $\overline{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

1. Zeigen Sie, dass das Minkowski-Produkt $x'_\nu x'^\nu = g_{\nu\mu}x'^\mu x'^\nu$ invariant unter der Lorenztransformation $x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu$ ist. Die Metrik $g_{\mu\nu}$ des Minkowskiraumes ist dabei gegeben durch $g = \text{Diag}[(1, -1, -1, -1)]$.

2. Die $\gamma-$Matrizen sind gegeben als: $\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$, $\gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}$ für $k = 1, 2, 3$.
Für die Kovarianz der Diracgleichung ist es notwendig, dass eine Transformation S existiert, für die $S^{-1}\gamma^\alpha S = L^\alpha_\mu \gamma^\mu$ gilt.

   (a) Zeigen Sie, dass S für kleine β dargestellt werden kann als $S = \mathbb{1} + \frac{\beta}{2}\gamma^1\gamma^0 + O(\beta^2)$.

   (b) Zeigen Sie nun, dass für beliebige β-Werte, $S = e^{\frac{\omega}{2}\gamma^1\gamma^0}$ gilt.
   Hinweis: Verwenden Sie $S^{-1} = \overline{S} = \gamma^0 S^\dagger \gamma^0$ und zeigen Sie, dass $e^{\frac{\omega}{2}\gamma^1\gamma^0} = \cosh(\frac{\omega}{2})\mathbb{1} + \sinh(\frac{\omega}{2})\gamma^1\gamma^0$ gilt.

Bitte Rückseite beachten!⟶

Aufgabe 7 (5 Punkte): *Normierung der ebenen Wellen*

Lösungen der freien Diracgleichung sind gegeben durch ebene Wellen mit $\Psi_\pm(x,t) = e^{\mp\imath(Et-\underline{k}\cdot\underline{x})}\psi_\pm^{(1,2)}(E,\underline{k})$ und:

$$(1) \qquad \psi_+^{(1)}(E,\underline{k}) = N \begin{pmatrix} (E+m)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ \underline{k}\cdot\underline{\sigma}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix}; \quad \psi_+^{(2)}(E,\underline{k}) = N \begin{pmatrix} (E+m)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ \underline{k}\cdot\underline{\sigma}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

$$(2) \qquad \psi_-^{(1)}(E,\underline{k}) = N \begin{pmatrix} \underline{k}\cdot\underline{\sigma}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ (E+m)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix}; \quad \psi_-^{(2)}(E,\underline{k}) = N \begin{pmatrix} \underline{k}\cdot\underline{\sigma}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ (E+m)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Normierungskonstante N so, dass für das Skalarprodukt $\langle\psi_\pm^{(1,2)}(E,\underline{k})|\psi_\pm^{(1,2)}(E,\underline{k})\rangle = 1$ gilt, und zeigen Sie ferner, dass $\psi_\pm^{(1)}\perp\psi_\pm^{(2)}$ aber $\psi_+^{(i)}$ nicht orthogonal zu $\psi_-^{(i)}$ ist.

Vorlesung:
- Dienstags 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 203.
- Donnerstags 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 203.

Tutorien:
- Mo. 10–12 Uhr im EW 226 (Mathias Hayn).
- Do. 12–14 Uhr im EW 731 (Clive Emary).
- Fr. 12–14 Uhr im EW 229 (Arash Azhand).

Anmeldung: Die Tutorieneinteilung, Punkteverteilung und Scheinvergabe zu der Vorlesung "Theoretische Physik V: Quantenmechanik II" erfolgt über das Moseskontosystem: https://moseskonto.tu-berlin.de/moseskonto/ vom 01.10.-20.10.2011 (Mitternacht).
Eine spätere Anmeldung ist nicht möglich. Benötigt wird ein tubit Nutzerkonto. Alternativ kann ein temporärer Account im Mathematikservicezentrum MA 708 erstellt werden.

Klausur:
- Noch nicht festgelegt.

Scheinkriterien:
- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme am Tutorium.
- Bestandene Klausur.

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- W. Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 5/1 und 5/2
- W. Greiner, Theoretische Physik 6
- U. Scherz, Quantenmechanik
- S. Gasiorowicz, Quantum physics
- H. Rollnik, Quantentheorie 1 und 2
- G. Baym, Lectures on quantum mechanics
- J. J. Sakurai, Modern quantum mechanics
- R. Shankar, Principles of quantum mechanics
- E. Merzbacher, Quantum mechanics