Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik
http://www.itp.tu-berlin.de Direktzugang: 78850
20. Oktober 2011

VL: Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD, Dr. Kathy Lüdge
UE: Dipl.-Phys. Judith Lehnert

1. Übungsblatt zur Nichtlinearen Dynamik und Kontrolle

Abgabe: Mo 31.10. 12:15 in der Übung. Die Abgabe erfolgt in **2er oder 3er Gruppen**.

Aufgabe 1 (10 Punkte): *Lotka-Volterra Modell*
Unabhängig voneinander stellten in den 20er Jahren Vito Volterra und Alfred James Lotka die später nach ihnen benannten Lotka-Volterra-Gleichungen zur Beschreibung von Populationsdynamiken auf. Hier soll ein System von Schafen und Hasen betrachtet werden:

$$\begin{aligned}\dot{N}_1 &= r_1 N_1 - b_1 N_1 N_2 \\ \dot{N}_2 &= r_2 N_2 - b_2 N_1 N_2\end{aligned}$$

mit $r_{1,2} > 0$, $b_{1,2} > 0$. N_1 bzw. N_2 beschreibt die Anzahl der Schafe bzw. Hasen.

1. Kommentieren Sie die biologische Bedeutung der einzelnen Terme.
2. Zeigen Sie, dass durch geeignete Reskalierung von N_1, N_2 und t das Modell auf die dimensionslose Form

$$\begin{aligned}x' &= x(1-y), \\ y' &= y(\rho - x)\end{aligned}$$

   gebracht werden kann. Geben Sie die Formel für ρ an.
3. Finden Sie die Fixpunkte der dimensionslosen Gleichungen und charakterisieren Sie diese (stabil/instabil, Fokus/Sattel/Knoten). Geben Sie auch die Eigenrichtungen der Fixpunkte an.
4. Skizzieren Sie das zugehörige Vektorfeld für $\rho = 4$ per Hand. Zeichnen Sie die Nullklinen und die Fixpunkte mit ihren Eigenvektoren ein. Warum genügt es, den ersten Quadranten zu betrachten? Überprüfen Sie Ihr Ergebnis am Computer. Zum Beispiel kann die Funktion VectorFieldPlot verwendet werden, um mit Mathematica Vektorfelder zu plotten.
5. Geben Sie die Lösung der dimensionslosen Gleichungen explizit an. Wenn nötig, machen Sie eine Fallunterscheidung.

Aufgabe 2 (10 Punkte): *Van der Pol Oszillator*
Van der Pol untersuchte in den 30er Jahren einen harmonischen Oszillator mit einem nichtlinearen Dämpfungsterm

$$\ddot{x} + \kappa(x^2 - a)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (\kappa \geq 0).$$

Wenn $a > 0$ ist, verhält sich der Dämpfungsterm für große Amplituden wie eine Reibung, wechselt aber für kleine Amplituden das Vorzeichen und führt so zu Schwingungen mit endlicher Amplitude.

1. Schreiben Sie die Gleichung als System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung mit $y = \dot{x}$ und finden Sie die Fixpunkte und deren Stabilität.
2. Lösen Sie die Gleichungen numerisch für $\kappa = 1$, $\omega_0 = 1$ und 1000 verschiedenen a Werten aus $[-1, 1]$. Lassen Sie in jeder Simulation eine transiente Zeit verstreichen (ca. 100 Zeiteinheiten) und tragen Sie dann Maxima und Minima von x über den a Werten auf, um so ein Bifurkationsdiagramm zu erhalten.
   Plotten Sie ausserdem das Phasen-Portrait in der (x, y)-Ebene für $a = 0.1$, $a = 1$, $a = 2$. Erläutern Sie das Verhalten des Oszillators, wenn a verändert wird.