A priori Wahrscheinlichkeit und Unkenntnis

Drei einfache Beispiele

1. Münze werfen

Symmetrie => a priori Wahrscheinlichkeit

Kopf $\frac{1}{2}$
Zahl $\frac{1}{2}$

Woher weiß ich, was was ist?
(perfekte Symmetrie?)

1 mal werfen $N=2$
2 " " $N=4$
3 " " $N=8$
n " " $N=2^n$

Beispiel: $\underbrace{KZZZK}_{n=5}ZKZKK$

Ergebnismenge Ω_5: $\{(KZZZK), \ldots\}$

2^5-elementige Menge

2. a) Farbwürfel

R G B C M Y
$\frac{1}{6}$ ...... $\frac{1}{6}$

Was kann schief gehen?

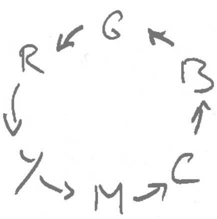
- Farbenblindheit?
  $R \equiv B$
- Symmetrie nicht gegeben
- Umgebung beeinflusst Wahrscheinlichkeiten
- Zeitsymmetrie?

b) Dynamischer Farbwürfel
↓
Es gelten Bewegungsgleichungen

Unkenntnis sei durch Beschränkung in der Beobachtung gegeben!

Bewegungsgleichung I

$R \to Y$
$G \to R$
$B \to G$
$C \to B$
$M \to C$
$Y \to M$



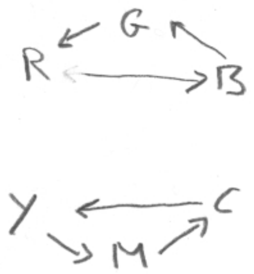
Beobachtung an zufälligen Zeitpunkten

$\Rightarrow \; p_i = \frac{1}{6}$

$p_i \equiv$ Wahrscheinlichkeit von Zustand i

Beweg. Gl. II

$R \to B$
$G \to R$
$B \to G$
$C \to Y$
$M \to C$
$Y \to M$



? zwei Zyklen

$$P(R\ G\ B)\ \tfrac{1}{3}\ ?\quad P(Y\ M\ C) = 0\ ?$$

Zyklus bleibt erhalten ? Erhaltungsgrößen einführen!

messen oder aus
anderen Informationen (statistischer Natur)

$\boxed{\text{Bewegungsgleichungen + alle Erhaltungsgrößen}}$

Beispiel spiegelt die Grundsystematik in Statistischen Physik wider.

gegeben bestimmt

3. Gekoppeltes Würfelpaar (Summe der Augen konstant)

Summe S=8

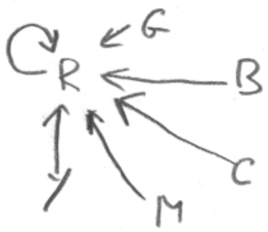
S = 2	1 Zustand	(1, 1)
S = 3	2 Zustände	(1,2) (2,1)
S = 4	3 "	(1,3) (2,2) (3,1)
⋮		
S = 11	2 "	....
S = 12	1 "	(6,6)

Ohne weitere Kenntnis nehmen wir je einen Zyklus an mit a priori Wahrscheinlk. gleichverteilt in den Zuständen,

Zyklus bedeutet: deterministisch, nur scheinbar statistisch.

Sind alle Bewegungsgleichungen möglich?

$R \to R$
$G \to R$
$B \to R$
$C \to R$
$M \to R$
$Y \to R$



a priori Wahrscheinlichkeit geht verloren!

(Folglich geht auch Information verloren)

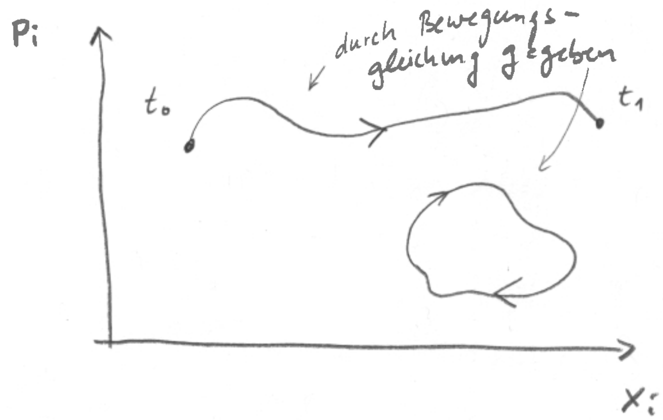
In jedem Zyklus zu einer Erhaltungsgröße sollen Zustände gleichwahrscheinlich sein, so dass eine Erhaltung der Wahrscheinlichkeiten.

Bemerkung: wir bleiben noch bei einfachen Beispielen und dem Begriff der <u>Information</u>.

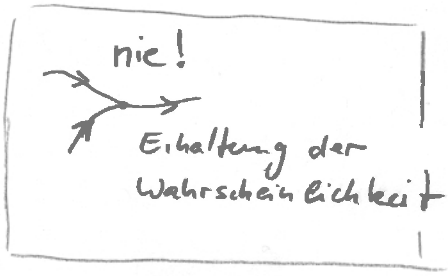
Allerdings vorab kurzer Exkurs zu kontinuierlichen Systemen und klassischer Mechanik:

Exkurs: <u>Anfang</u>

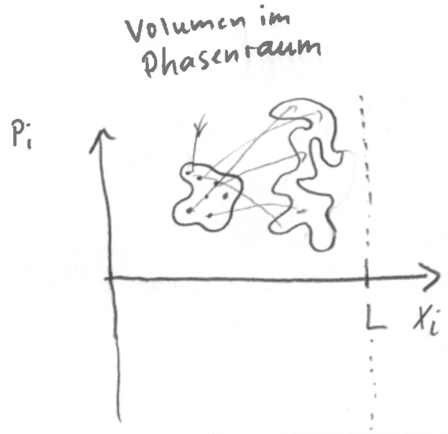
Die drei Beispiel waren diskret. In der klassischen Mechanik haben wir aber einen kontinuierlichen Phasenraum.



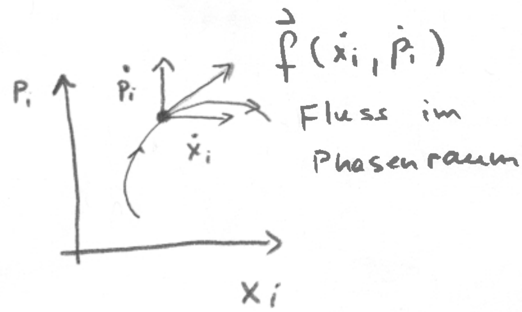
jeder Punkt im Phasenraum zugänglich? Führt zur Frage: Woher kommt die a priori Wahrscheinlichkeit.



Moleküle im Kasten



ein Molekül



Satz von Liouville: $\operatorname{div} \vec{f} = 0$ (Quellenfreier Fluss)

$$\operatorname{div} \vec{f} = \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} + \boxed{\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2}} + \dots + \frac{\partial \dot{p}_1}{\partial p_1} + \boxed{\frac{\partial \dot{p}_2}{\partial p_2}} + \dots$$

heben sich auf

$$\boxed{H(q,p) = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V(\vec{q})}$$

(allgemein, generalisierte Koordinaten q_i und Impulse p_i)

$\Rightarrow$

$$\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \,; \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial x_k} + \frac{\partial \dot{p}_k}{\partial p_k} = 0 \quad \square$$

Achtung: Kurzform, vgl. Landau & Lifschitz V

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{f}) = 0 \qquad \rho \equiv \text{Verteilungsfunktion}$$