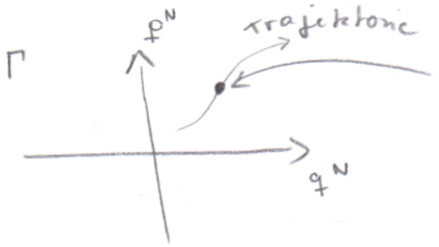
Γ-Raum-Statistik & μ-Raum-Statistik

X (1)

Annahme: N-Teilchen-System

- Γ-Raum   Frage: N Teilchenorte und -geschwindigkeiten (Impulse) zum Zeitpunkt t

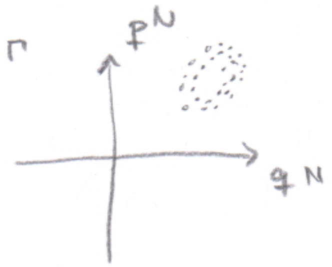
$$q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N, t$$



Mikrozustand p_i

Keine statistische Beschreibung!

Erst durch Makrozustand mit Hilfe des Ensemble (Gesamtheit!) $\Rightarrow$ statistische Beschreibung des Gleichgewichts (zeitunabhängig)



$$P_i \rightarrow \varrho(\Gamma)\, d\Gamma$$

unterscheidbar $\quad \sum_i \rightarrow \frac{1}{h^{3N}} \int d\Gamma \qquad$ (klassich!)

ununtersch. $\quad \sum_i \rightarrow \frac{1}{h^{3N} N!} \int d\Gamma$

• μ - Raum   Frage : Verteilungsfunktion $f(q, p, t)$

$\underbrace{\mu}_{\equiv}$ und $dq\,dp \equiv d\mu$ kurzschreibweise

$q\,,\,p\,,\,t$ sechs-dimensional, zeitabhängig

Beachte : $f(\mu, t)\, d\mu = dN$ daher

$$p_i \longrightarrow \frac{1}{N} f(\mu, t)\, d\mu \qquad (1)$$

Allerdings für Anzahl der Zustände

$$p_i \sim \frac{\Delta\mu}{N} f(\mu, t) \qquad (2)$$

mit $S' = N s$ und $s = -k \sum_i p_i \ln p_i$

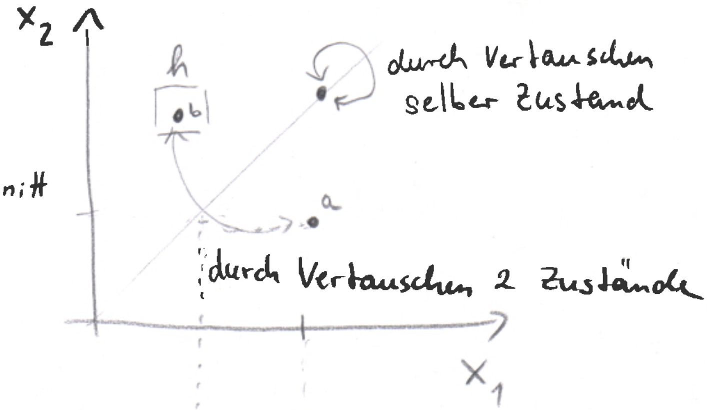
$$S' = -k_B \int f \ln\left(\frac{\Delta\mu}{N} f\right) d\mu$$

$$= k_B H + \text{const.}$$

Γ- und μ-Raum Unterscheidbarkeit

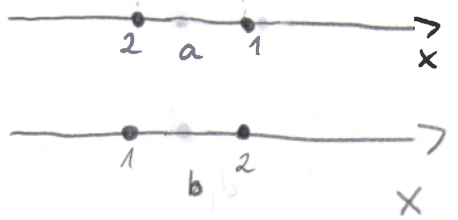
Γ

x_1, x_2 - Schnitt

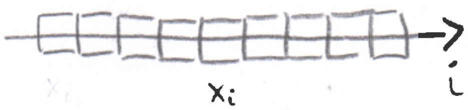


μ

x - Schnitt



diskret



besetzt mit n_i Teilchen

$$\frac{N!}{n_0!\, n_1! \ldots}$$ Multinomial-koeffizient

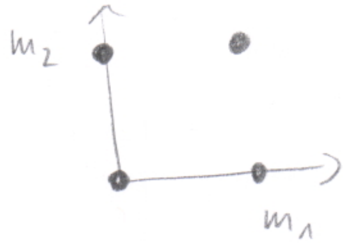
Multiplizität des Zustandes

$\{n_\nu\}$

↑

Besetzungsschema

Münze 1, Münze 2, ...



Anzahl der Zustände

$$2^N = 4$$

Anzahl der Permutationen

$$N! = 2 \quad \text{für } N=2$$

① ②
② ①

$$3! = 6$$

1 2 3
1 3 2
2 1 3
...

Binomialkoeffizient

6 aus 49 $\Rightarrow \binom{49}{6}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdots \frac{n-(k-1)}{k}$$

$$= \prod_{j=1}^{k} \frac{n+1-j}{j}$$

Unterscheidbare Teilchen → Ununterscheidbare Teilchen

$$Z = \left[\sum_\nu e^{-\beta \varepsilon_\nu} \right]^N = z^N$$

N: Anzahl der Freiheitsgrade s. Einschub

Produkt identischer Ein-Teilchen Summen

$z = \sum_\nu x_\nu$ mit $x_\nu = e^{-\beta \varepsilon_\nu}$ und

Multinomialsatz $(x_0 + x_1 + \dots x_\nu)^N = \sum_{\{n_\nu\}} \frac{N!}{n_0!\, n_1! \dots} x_0^{n_0} x_1^{n_1} \dots$

(verallg. binomischen Satzes)

Summe über alle Besetzungsschemata $\{n_\nu\}$

Mikro-Nebenbedingung

$$\sum_\nu n_\nu = N$$

Interpretation:

$$E_{\{n_\nu\}} = \sum_\nu n_\nu \varepsilon_\nu$$

Energie des konkreten Besetzungsschema

Zustandssumme aus $E_{\{n_\nu\}}$

$$Z = \sum_{\{n_\nu\}} g_{\{n_\nu\}} e^{-\beta E_{\{n_\nu\}}}$$

mit $g_{\{n_\nu\}}$ Multiplizität des Zustandes $\{n_\nu\}$

für unterscheidbare Teilchen

$$g^u_{\{n_\nu\}} = \frac{N!}{n_0!\, n_1! \dots}$$

Anzahl verschiedener Mikrozustände der Besetzungsschemata

Quantenstatistik: Identische Teilchen sind ununterscheidbar $\Rightarrow$

Teilchenvertauschung führen <u>nicht</u> zu verschiedenen (zusätzlichen) Mikrozuständen.

Besetzungszustand $\{n_\nu\}$ legt Mikrozustand <u>eindeutig</u> fest. (nicht $\frac{N!}{n_0! n_1! \ldots}$ -deutig)

Einfluss auf a priori Wahrscheinlichkeit!

$$\boxed{g^{n}_{\{n_\nu\}} = 1}$$

$$Z^Q = \sum_{\{n_\nu\}} e^{-\beta \sum n_\nu \varepsilon_\nu}$$

ist <u>nicht</u> mehr in Ein-Teilchen-Zustandssumme separierbar!

Was bedeutet das für den Phasenraum?