Ideale Fermi / Bose - Gas

Mikro-Nebenbedingung $\sum_\nu n_\nu = N$ führt zu Schwierigkeiten, da Zustandssumme (vgl.) nicht mehr in Ein-Teilchen-Zustandssummen separierbar. Lösung Quantengase großkanonisch beschreiben.

Makro-Nebenbedingung $\bar{N} = \langle N_{\{n_\nu\}} \rangle$

mit $N_{\{n_\nu\}} = \sum_\nu n_\nu$ Anzahl $\underbrace{\text{im Besetzungsschema } \{n_\nu\}}$

weiterhin: $E_{\{n_\nu\}} = \sum_\nu n_\nu \varepsilon_\nu$ Energie "

$$Z_G = \sum_{\{n_\nu\}} e^{-\sum_\nu n_\nu (\beta \varepsilon_\nu + \gamma)} \qquad \text{mit } \mu = -\frac{\gamma}{\beta}$$

↑ Summe über alle Besetzungsschemata

$$Z_G = \sum_{\{n_\nu\}} e^{-\beta \sum_\nu n_\nu (\varepsilon_\nu - \mu)}$$

und analog

$$p_{\{n_\nu\}} = \frac{1}{Z_G} e^{-\beta \sum_\nu n_\nu (\varepsilon_\nu - \mu)}$$

Wahrscheinlichkeit des Besetzungsschemas $\{n_\nu\}$

(Achtung die einzelnen $\{n_\nu\}$ haben <u>keinen</u> Index)
sie sind der Index in $\sum_{\{n_\nu\}}$ Schreibweise

Vorteil (*): n_ν von Nebenbedingung befreit, können alle Werte unabhängig von einander durchlaufen.

Hilfsschreibweise:

- $y_\nu = e^{-\beta(\varepsilon_\nu - \mu)}$
- $\sigma_\nu = \sum_{n_\nu}^{\infty} y_\nu^{n_\nu}$

(*)
$$Z_G = \sum_{\{n_\nu\}} \prod_{\nu=0}^{\infty} e^{-\beta n_\nu(\varepsilon_\nu - \nu)} = \sum_{\{n_\nu\}} \prod_{\nu=0}^{\infty} y_\nu^{n_\nu}$$

$$= \sum_{n_0} y_0^{n_0} \sum_{n_1} y_1^{n_1} \cdots = \prod_\nu \sum_n y_\nu^n = \prod_\nu \sigma_\nu$$

(*) da $\sum_{\{n_\nu\}}$ über alle möglichen Kombinationen der n_ν ohne Mikro-Nebenbed. $\sum n_\nu = N$, kann Summe als Produkt umgeschrieben werden.

Analog:

$$P_{\{n_\nu\}} = \frac{1}{Z_G} \prod_\nu y_\nu^{n_\nu} = \prod_\nu p_\nu(n_\nu)$$

mit $p_\nu(n) = \frac{y_\nu^n}{\sigma_\nu}$

definition der Funktion $p_\nu(n)$

$p_\nu(n_\nu)$ ist der Wert bei n_ν!