

Ausgangbare Systeme

- Hodgkin-Huxley-Gleichungen

$$C \dot{V} = -\bar{g}_{Na} m^3 h (V - E_{Na}) - \bar{g}_K n^4 (V - E_K) - \bar{g}_L (V - E_L)$$

$$\dot{n} = \alpha_n(V)(1-n) - \beta_n(V)n$$

$$\dot{m} = \alpha_m(V)(1-m) - \beta_m(V)m$$

$$\dot{h} = \alpha_h(V)(1-h) - \beta_h(V)h$$

Phasenraumanalyse ist graphisch erst in einem 2-Variablen-Modell einfach.

mit $\tau_n = \frac{1}{\alpha_n + \beta_n}$ und $n_\infty = \frac{\alpha_n}{\alpha_n + \beta_n}$

etc

und $\tau_m \ll \tau_n \approx \tau_h$

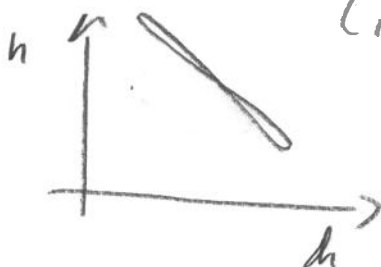
- m ist schnelle Variable, die von den langsamen Variablen "versklavet" (Haken) wird. (adiabatische Elimination)

Annahme $\dot{m} = 0$ Mannigfaltigkeit ("Nullkline")

weist keine kritischen Stellen auf (immer anziehend)

$$\tau_m \dot{m} = -m + m_\infty \stackrel{\dot{m}=0}{\Rightarrow} m = m_\infty(V)$$

- weitere Reduktion da n und h synchron (in anti-Phase)



$$n = b - r h$$

Morris-Lecar-Modell

(2)

$$C \dot{V} = -g_L (V - E_L) - g_K n (V - E_K) - g_{Ca} m_{\infty}(V) + I_{app}$$

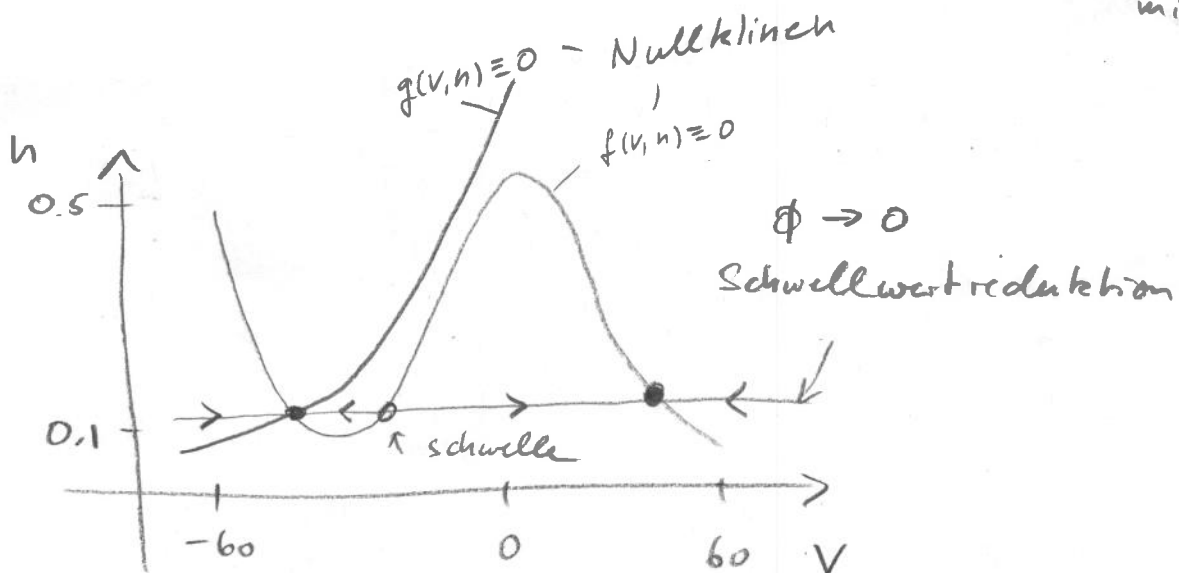
$$\frac{dn}{dt} = \phi (-n + n_{\infty}(V)) \frac{1}{\tau_n(V)}$$

$$m_{\infty}(V) = \frac{1}{2} [1 + \tanh((V - V_1)/V_2)]$$

$$\tau_n(V) = 1 / \cosh((V - V_3)/2V_4)$$

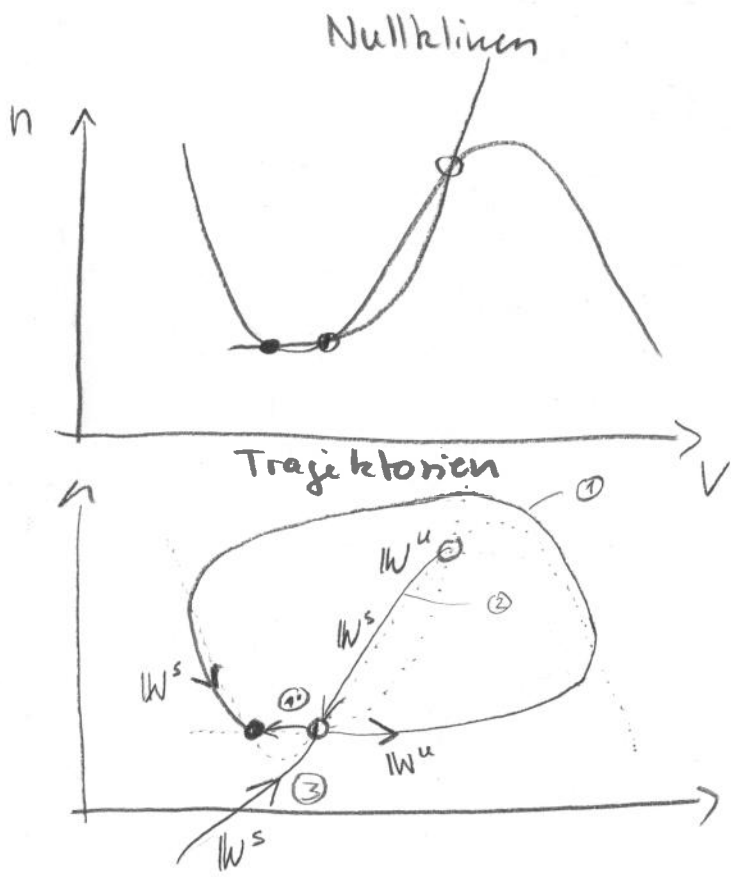
$$n_{\infty}(V) = \frac{1}{2} [1 + \tanh((V - V_3)/V_4)]$$

Werte für Parameter s. z. B. Ermentrout & Terman
Seite 51. (email an mich)



$$\dot{V} = f(V, n)$$

$$\dot{n} = \phi g(V, n)$$



Stabilität?

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial n} \\ \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial n} \end{bmatrix} \Big|_{FP}$$

Suche EW

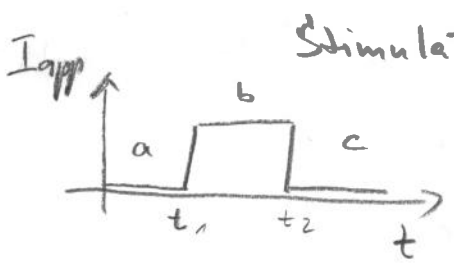
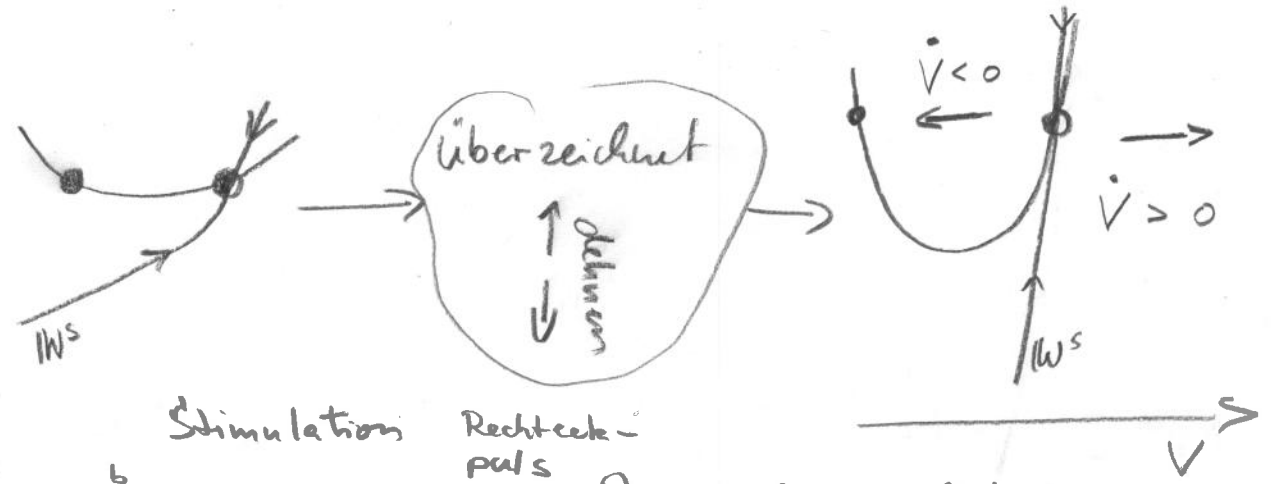
- ① instabile Mannigfaltigkeit des Sattelpunktes
- stabile " " des Knoten

⇒ heterokline Verbindung zweier Fixpunkte (analog ①)

- ② heterokline Verbindung zwischen zwei Knoten 0,0

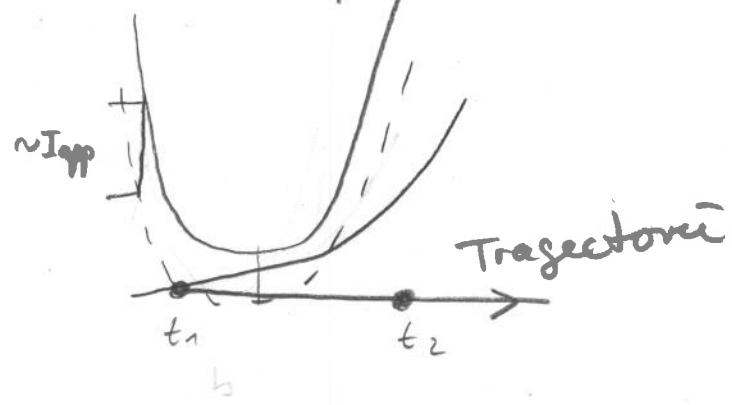
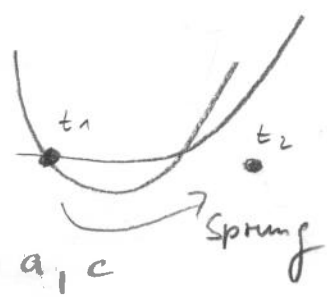
- ③ stabile Mannigfaltigkeit die als Separatrix eine Schwelle bildet

Schwelle für Anregungen $I_{app}(t)$



Stimulation Rechteckpuls

Nullcline $\dot{V}=0$ an, zwischen t_1 und t_2

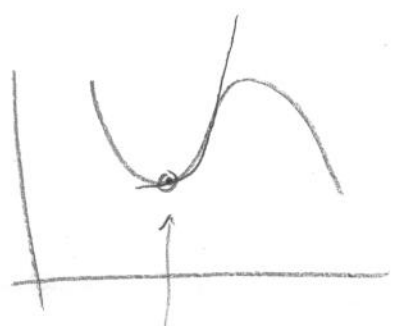
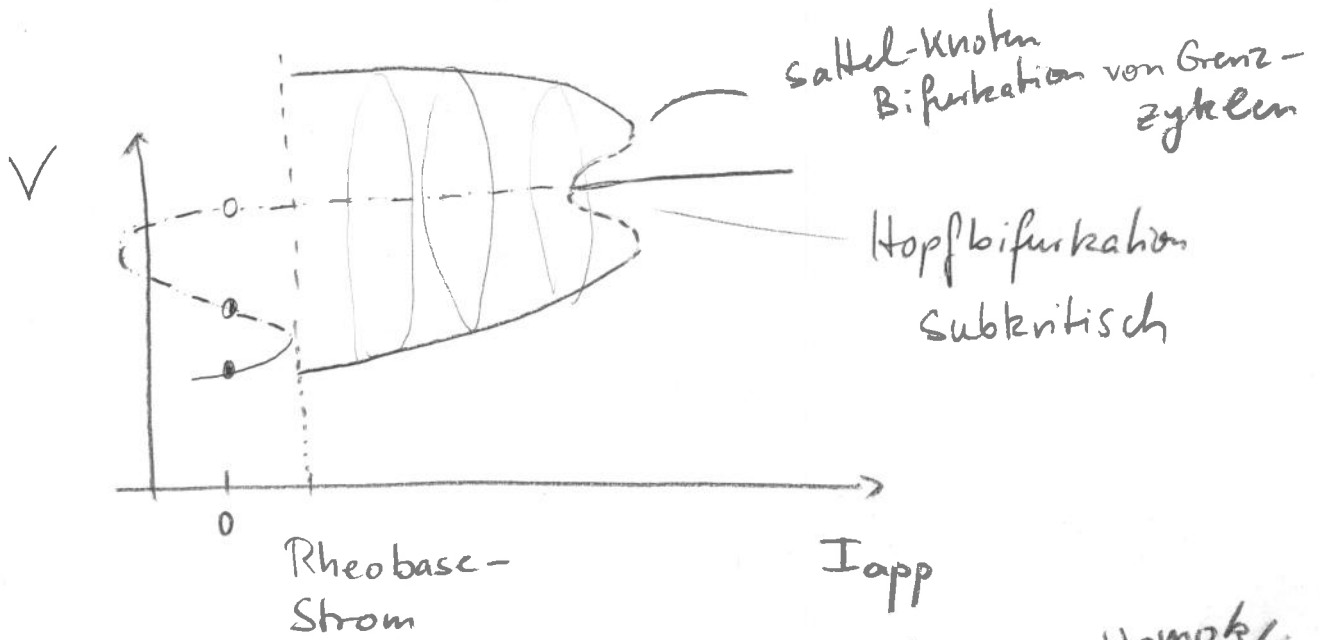


Externer Stimulationstrom I_{app} zieht die $\dot{V}=0$ Nullcline nach oben.

Kurzer Stromstoß \Rightarrow Exkursion im Phasenraum um Heterokline Verbindung ① herum zurück in den stabilen Knoten: Anregung (Excitability)

langer Stromstoß?

Bifurkationsdiagramm Excitability type I



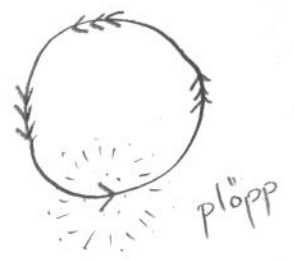
Sattel und Knoten treffen sich

Saddle-node bifurcation on invariant circle "SNIC" auch SNLC

Heterokline



Homokline

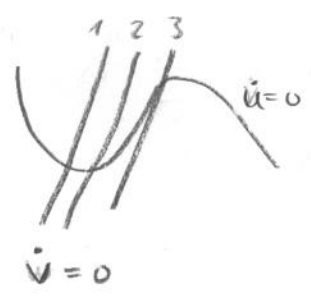


Grenzzyklus (Limit cycle "LC")

(Es kann noch zu Homoklinen-Bifurkationen kommen)

SNIC spielt fundamentale Rolle bei neuronaler Informationsverarbeitung, z.B. Adaptation etc.

Bifurkationsdiagrammen Excitability type II



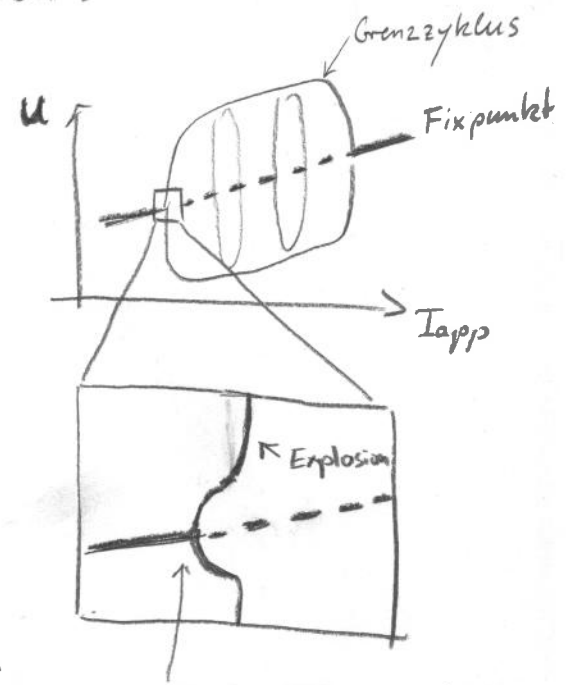
genauso gut (aber schlecht zu zeichnen!)
hätte ich die $\dot{v}=0$ Nullkurve hoch
schreiben können.

$$\dot{u} = u - \frac{u^3}{3} - v + I_{app}$$

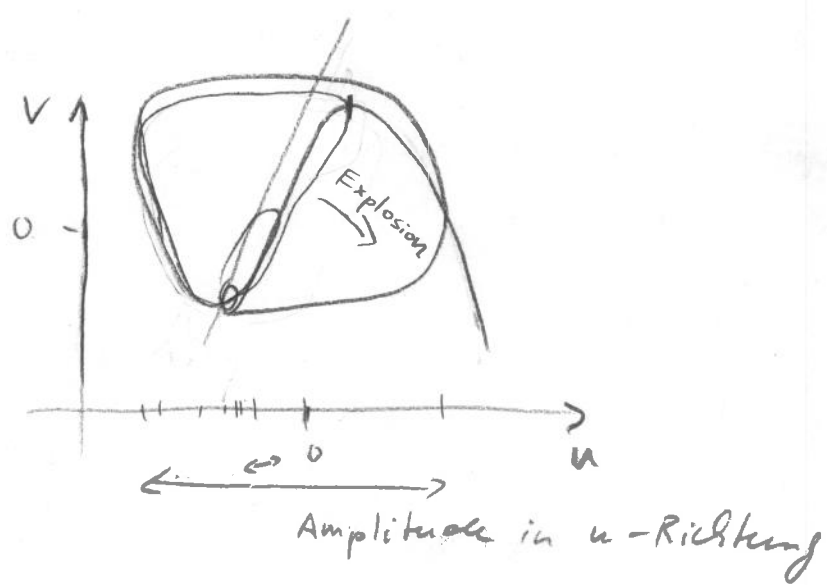
$$\dot{v} = \epsilon(u + \beta - \gamma v)$$

Störungstheorie $\epsilon \ll 1$

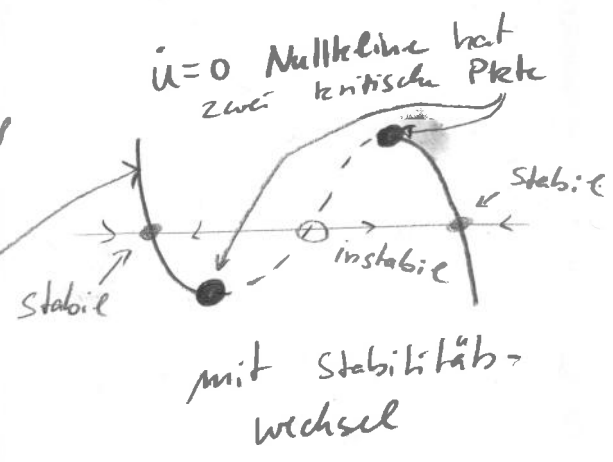
- innere Lösung: Schwellwertreduktion



Hopf: Parabel-
förmiges
anwachsen des
Grenzzyklus,
dann canard-
Explosion



kritische
Mannigfaltigkeit



$$\dot{u} = f(u, v)$$

$$\dot{v} = \epsilon g(u, v)$$

Schnell Zeitskala

$\epsilon \rightarrow 0$ innere Lösung $\dot{v} = 0, v = v^*$

Springt "innen" zwischen zwei Flächen der kritischen Mannigfaltigkeit.

$$\dot{u} = f(u, v)$$

$$\frac{1}{\epsilon} \dot{v} = g(u, v)$$

$$\epsilon \dot{u}' = f(u, v)$$

$$\dot{v}' = g(u, v)$$

"dot" $\equiv \frac{d}{dt}$

$t' = t \cdot \epsilon$ Zeittransformation

"prime" $\equiv \frac{d}{dt'}$

langsame Zeitskala t'

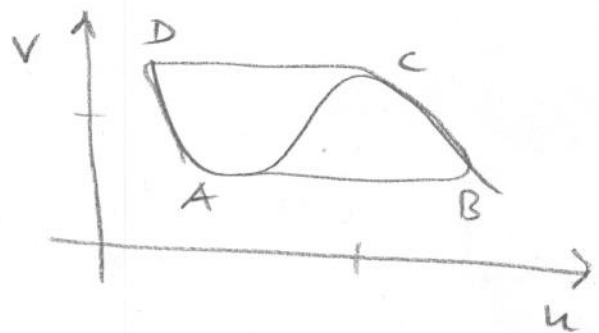
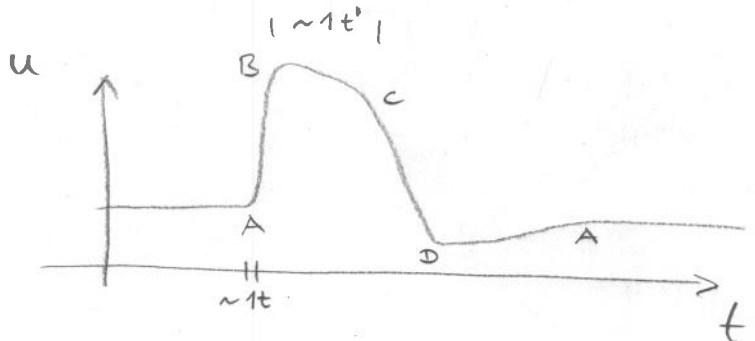
"1 $\frac{1}{60}$ min ist 1 Sekunde"

$\epsilon \rightarrow 0$

(Beispiel $t' = 1 \cdot \frac{1}{60} = t \cdot \epsilon$)

$$f(u, v) \equiv 0$$

2. Fall unterschiedlicher



• äußere Lösung =

auf kritischer Mannigfaltigkeit.

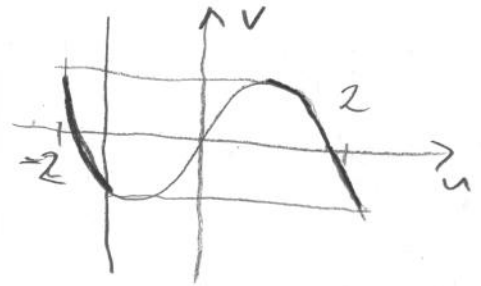
8

$$\varepsilon \ddot{u} = u - \frac{u^3}{3} - v \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow v = u - \frac{u^3}{3}$$

$$\dot{v} = u + \beta \quad (\gamma = 0)$$

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \dot{u} - u^2 \dot{u} = u + \beta \\ &= \dot{u} (1 - u^2) = u + \beta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \dot{u} = \frac{u + \beta}{1 - u^2}$$



$$\int_{\pm 2}^{u_e} du \frac{1-u^2}{u+\beta} = (\beta^2 - 1) \ln \frac{\beta+2}{\beta+u_e} - a(\pm 2 - u_e) + 2 - \frac{u^2}{2} = t$$

Fluchtzeit und Refraktärzeit (\leftarrow Integration

bis zum Fixpunkt $\Rightarrow t \rightarrow \infty$, nur bis

$$f(u, 0) = 0$$