

7. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie I

Abgabe: Freitag, den 18. Januar 2013 vor der Übung

Ausgabe: Freitag, den 21. Dezember 2012

Jeder Übungszettel bringt 10 Punkte!

Wir wünschen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!

Feldgleichungen

Zeigen Sie, daß die Gleichungen

$$R_{\alpha\beta} = -\frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T g_{\alpha\beta} \right) \quad (1)$$

den Einsteinschen Feldgleichungen

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}$$

äquivalent sind. Berechnen Sie den Ricci-Skalar für das elektromagnetische Feld dessen Energie-Impuls-Tensor definiert ist durch

$$T_{\gamma}^{\beta} := \frac{c}{4\pi} \left(F^{\beta\alpha} F_{\alpha\gamma} + \frac{1}{4} \delta_{\gamma}^{\beta} F^{\alpha\lambda} F_{\alpha\lambda} \right).$$

Wie lautet die verkürzte Form der Feldgleichungen für ein gekoppeltes Maxwell-Einstein-Feld im Vakuum?

Linearisierte Feldgleichungen

Der metrische Tensor läßt sich stets in die Minkowskimetrik η und einen Rest h zerlegen:

$$g_{\alpha\lambda} = \eta_{\alpha\lambda} + h_{\alpha\lambda}$$

Zeigen Sie, daß, unter der Annahme $|h_{\alpha\lambda}| \sim |h_{\alpha\lambda,\beta}| \sim |h_{\alpha\lambda,\beta,\gamma}| \ll 1$, die Feldgleichungen in der Form (1) in erster Näherung die Gestalt

$$h_{\rho,\mu,\nu}^{\rho} + h_{\mu\nu,\rho}^{\rho} - h_{\mu\rho,\nu}^{\rho} - h_{\nu,\rho,\mu}^{\rho} = -\frac{16\pi G}{c^4} \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T \eta_{\alpha\beta} \right)$$

annehmen. Vernachlässigen Sie dazu alle in $h_{\alpha\beta}$ und dessen Ableitungen nichtlinearen Terme.

Wie lassen sich auf der linken Seite die Summanden bis auf $h_{\mu\nu,\rho}^{\rho}$ eliminieren? Zeigen Sie, daß sich eine inhomogene Wellengleichung ableiten läßt.

Eine Kommentierung Ihres Vorgehens wird erwartet! Dafür gibt es auch Punkte!

Sprechstunde: Nach Vereinbarung oder direkt nach der Übung.

Falls es Fragen gibt, bin ich auch per Mail erreichbar:

gerold.schellstede@campus.tu-berlin.de