Technische Universität Berlin, Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. von Borzeszkowski; Dr. Chrobok; Schellstede

8. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie I

Abgabe: Freitag, den 25. Januar 2013 vor der Übung
Ausgabe: Freitag, den 11. Januar 2013
Jeder Übungszettel bringt 10 Punkte!

Wir wünschen ein frohes neues Jahr!

Noch einmal der Krümmungstensor

Der Riemannsche Krümmungstensor wurde definiert durch:

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma,\delta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta,\gamma} + \Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\delta\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\beta\delta}\Gamma^{\alpha}_{\gamma\sigma}. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie die Antisymmetrie im vorderen Indexpaar.
Der Beweis ist einfach wenn man die Definition des Krümmungstensors verwendet. Man zeigt dann, dass der symmetrische Teil verschwindet.

b) Zeigen Sie die Symmetrie $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}$.
Es ist auch hilfreich an den ersten Übungszettel zu denken.

Weyl-Tensor

Es erweist sich als sinnvoll, neben dem Krümmungstensor den sogenannten Weyl-Tensor zu betrachten, der wie folgt definiert ist:

$$C^{ab}{}_{cd} = R^{ab}{}_{cd} - 2g^{[a}{}_{[c}R^{b]}{}_{d]} + \frac{R}{3}g^{a}{}_{[c}g^{b}{}_{d]}. \tag{2}$$

Dieser Weyl-Tensor „erbt“ die Symmetrieeigenschaften des Krümmungstensors, darüber hinaus aber eine weitere. Zeigen Sie, dass der Tensor spurfrei ist, d.h. $C^{ab}{}_{ad} = 0$ gilt.

Man kann jetzt beweisen, daß die Weyl-Tensoren für Riemannsche Geometrien, deren metrische Tensoren sich nur um einen Konformfaktor ($g_{\mu\nu} = \gamma\tilde{g}_{\mu\nu}$) unterscheiden, identisch sind. Diese Eigenschaft ermöglicht eine Klassifizierung unterschiedlicher Geometrien.

Zeigen Sie, daß für eine konform-euklidische Geometrie ($g_{\mu\nu} = \gamma(x^i) \cdot \eta_{\mu\nu}$) der Weyl-Tensor identisch verschwindet. Welche Gestalt nehmen der Krümmungs- und der Ricci-Tensor in diesem Fall an?

Eine Kommentierung Ihres Vorgehens wird erwartet! Dafür gibt es auch Punkte!

Sprechstunde: Nach Vereinbarung oder direkt nach der Übung.
Falls es Fragen gibt, bin ich auch per Mail erreichbar:
gerold.schellstede@campus.tu-berlin.de