Zusammenfassung KGG

$$\left(\Box + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0$$

"+" - relativistisch invariant

"+" - nichtrelat. Grenzfall ist SG [1] $\to$ KGG beschreibt Spin-0-T.

"+" - Hinweise auf T./AntiT. Problematik $\to$ Ladungsinterpretation Vielteilchentheorie

"–" - spinlose T. und fehlende Wahrscheinlichkeitsinterpretation in Kontinuitätsglg

Erinnere Mechanik (Zusatz)

Bewegungsgleichungen f. Wellenfelder aus

$$\delta \int d^4x \, \mathcal{L}\left(\psi_\nu, \frac{\partial \psi_\nu}{\partial x^\mu}\right) = 0$$

Lagrange-Dichte

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \psi_\nu}{\partial x^\mu}\right)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\nu} = 0$$

Euler-Lagrange-Glg.

Beisp. Mechanik / E-Dynamik: Ableitung der Maxwell'schen Glgn.

Hier führt

$$\mathcal{L}\left(\psi, \psi^*, \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu}, \frac{\partial \psi^*}{\partial x^\nu}\right) = \frac{\hbar^2}{2m_0}\left(g^{\mu\nu} \frac{\partial \psi^*}{\partial x^\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \psi^* \psi\right)$$

auf KGG für ψ und ψ^*, z.B.

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \psi + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0$$

---

1) Korrektur zur letzten Woche: nichtrelat. Grenzfall der KGG

Ansatz: $\psi(\underline{r}, t) = \underbrace{\varphi(\underline{r}, t)}_{\text{langsame zeitliche Variation (→ "Einhüllende")}} \; \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t}}_{\text{schnell oszill. Beitrag}}$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{i}{\hbar} m_0 c^2 \varphi\right) e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t}\right] =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{2i}{\hbar} m_0 c^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2} \varphi\right) e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t}$$

usw. siehe 1.C0

2. DIRAC-Gleichung (DG)

Relativ. invariante Wellengl. für Spin-$\frac{1}{2}$-T.

Dirac (1928)

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi = c\,\hat{\underline{\alpha}}\,\hat{\underline{p}}\,\Psi + m_0 c^2 \hat{\beta}\,\Psi \qquad (1)$$

(freie T.)

natürlich keine Verletzung

Was bedeuten die Größen in (1)?

- Raum und Zeit "gleichberechtigt", beide Ableitungen 1. Ordnung

- $\hat{\beta}, \hat{\alpha}_i$ $(i = 1,2,3)$ können keine Zahlen sein (Drehinvarianz)
- Ψ kann keine Skalare Fkt. sein, schreibe

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \vdots \\ \Psi_n \end{pmatrix}$$

da nichtrelat. Grenzfall Pauli-Gleichung Vermutung Ψ Spinor

$$\Psi \in \mathcal{H} = \underset{\text{Bahn}}{\mathcal{H}_B} \times \underset{\text{Spin}}{\mathcal{H}_S}$$

dann sind $\hat{\alpha}_i$ und $\hat{\beta}$ $n \times n$ Matrizen und (1) ein System aus n gekoppelten Differentialglgn. 1. Ordnung für n Spinor-Komponenten Ψ_i

- fordere $\hat{H}$ hermitesch

$$\hat{H}^+ = c\,\hat{\underline{p}}\,\underline{\alpha}^+ + m_0 c^2 \beta^+ \overset{!}{=} \hat{H}$$

wenn $\hat{\underline{\alpha}}$ und $\hat{\beta}$ hermitesch und $[\underline{\alpha}, \hat{\underline{p}}] = 0$
(erfüllt, da $\hat{\underline{\alpha}}$ nicht in $\mathcal{H}_B$ wirken)

- Fordere Erfüllung der relativ. Energie-Impuls-Relation

$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ (1) und iterieren ergibt

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} =$$

$$= (c\hat{\underline{\alpha}}\cdot\hat{\underline{p}} + m_0c^2\hat{\beta})(c\hat{\underline{\alpha}}\hat{\underline{p}} + m_0c^2\hat{\beta})\,\psi =$$

$$= \left[c^2(\underline{\alpha}\cdot\underline{p})(\underline{\alpha}\cdot\underline{p}) + m_0c^3(\hat{\underline{\alpha}}\hat{\underline{p}}\hat{\beta} + \hat{\beta}\hat{\underline{\alpha}}\cdot\hat{\underline{p}}) + m_0^2c^4\hat{\beta}^2\right]\psi =$$

$$= \left[c^2\sum_{i,j=1}^{3}\hat{\alpha}_i\hat{\alpha}_j\hat{p}_i\hat{p}_j + m_0c^3\sum_{i=1}^{3}(\hat{\alpha}_i\hat{\beta} + \hat{\beta}\hat{\alpha}_i)\hat{p}_i + m_0^2c^4\hat{\beta}^2\right]\psi =$$

$$\stackrel{!}{=} (c^2\hat{\underline{p}}^2 + m_0^2c^4)\,\psi$$

Folgerungen: 1) $\sum_{i,j=1}^{3}\alpha_i\alpha_j\hat{p}_i\hat{p}_j = \hat{\underline{p}}^2$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}&(\hat{\alpha}_i)^2 = \underline{\mathbb{1}}\\ &\hat{\alpha}_i\hat{\alpha}_j + \hat{\alpha}_j\hat{\alpha}_i = 0\ ;\ i \neq j\end{aligned}} \quad (2)$$

2) $\boxed{(\hat{\beta}_i)^2 = \underline{\mathbb{1}}}$ (3)

3) $\boxed{\hat{\alpha}_i\hat{\beta} + \hat{\beta}\hat{\alpha}_i = 0}$ (4)

Fazit: $\hat{\alpha}_i$ und $\hat{\beta}$ sind hermitesche antikommutierende $n\times n$ Matrizen vom Betrag $\underline{\mathbb{1}}$

Eigenwerte (EW) der Matrizen $\hat{\alpha}_i$ $(i=1,2,3)$ und $\hat{\beta}$

Da $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}$ hermitesch $\rightarrow$ EW reell. Aus $\hat{\alpha}_i^2 = \mathbb{1}$ und $\hat{\beta}^2 = \mathbb{1}$ folgt: <u>EW sind ± 1.</u>

<u>erinnere</u>: $\hat{\alpha}_i = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_n \end{pmatrix}$ in Diagonaldarstellung mit EW $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (EW einer Matrix darstellungsunabhängig) 2)

2) $\hat{\alpha}_i^2 = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^2 & & & \\ & A_2^2 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & A_n^2 \end{pmatrix} \Rightarrow A_k^2 = 1,\ A_k = \pm 1,\ k=1,\ldots,n$

$\hat{\alpha}_i$ und $\hat{\beta}$ haben Spur gleich Null $\Rightarrow$ n gerade

denn $\hat{\alpha}_i \hat{\beta} + \hat{\beta}\hat{\alpha}_i \overset{(4)}{=} 0 \ \Big| \cdot \hat{\beta}$ von rechts $\quad \hat{\alpha}_i \underbrace{\hat{\beta}^2}_{\mathbb{1}} = -\hat{\beta}\hat{\alpha}_i\hat{\beta}$

da stets $Sp(\hat{A}\cdot\hat{B}) = Sp(\hat{B}\cdot\hat{A})$ folgt

$Sp(\hat{\alpha}_i) = -Sp(\hat{\beta}\hat{\alpha}_i\hat{\beta}) = -Sp(\hat{\beta}^2\hat{\alpha}_i) = -Sp(\hat{\alpha}_i)$, also $Sp(\hat{\alpha}_i) = 0$

analog für $\hat{\beta}$.

1) Spur einer Matrix ist gleich der Summe der EW [1)] $\Rightarrow$

unter den EW von $\hat{\alpha}_i$ und $\hat{\beta}$ treten $+1$ und -1 gleich häufig auf, also sind $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}$ Matrizen gerader Dimension n

-5- →

---

1) <u>erinnere QM I</u>: $\hat{U}$ diagonalisiere $\hat{\alpha}_i$ $\quad \hat{U}\hat{\alpha}_i\hat{U}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & 0 \\ 0 & \ddots & \\ & & A_n \end{pmatrix}$

also $\underbrace{Sp(\hat{U}\hat{\alpha}_i\hat{U}^{-1}) = Sp(\hat{\alpha}_i\hat{U}\hat{U}^{-1}) = Sp(\hat{\alpha}_i)}_{LS} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} A_k}_{RS}$

2) $\hat{A}\psi_\alpha = \alpha\psi_\alpha \xrightarrow[\text{unitär}]{\hat{U}} \hat{U}\hat{A}\hat{U}^{-1}\hat{U}\psi_\alpha = \alpha\hat{U}\psi_\alpha \ \rightarrow$ die "gedrehte" Matrix $\hat{A}' = \hat{U}\hat{A}\hat{U}^{-1}$ hat die "gedrehten" Eigenvektoren $\psi_\alpha' = \hat{U}\psi_\alpha$ mit denselben EW α

Wahl der Ordnung n der quadratischen Matrizen $\hat{\alpha}_i$, $\hat{\beta}$

$n = 2$: es gibt nur drei antikommutierende 2×2 Matrizen (die drei Pauli-Matrizen) statt der benötigten vier.

$n=4$: niedrigste Ordnung, in der die Forderungen der Algebra (2)-(4) erfüllt werden können

mögliche explizite Darstellung der → Dirac-Matrizen

(ohne Beweis → prüfen...)

$$\hat{\alpha}_i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_i \\ \hat{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix}, \quad i=1,2,3 \qquad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \qquad (5a)$$

wobei die $\hat{\sigma}_i$ die aus QM I bekannten Pauli'schen Spinmatrizen

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (5b)$$

Physikalische Interpretation d. Dirac-Glg

(1): $$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\hbar c \sum_{k=1}^{3} \hat{\alpha}_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + m_0 c^2 \hat{\beta} \psi \qquad \text{(freie T.)}$$

o Kontinuitätsglg., Wahrscheinlichkeitsinterpretation

versuche Darstellung $\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{j} = 0$, ϱ ? $\underline{j}$?

berechne $\psi^+ (DG) - (DG)^+ \psi$

$$\psi^+ i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\hbar c \psi^+ \sum_{k=1}^{3} \hat{\alpha}_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + m_0 c^2 \psi^+ \hat{\beta}$$

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^+}{\partial t} \psi = i\hbar c \sum_{k=1}^{3} \underbrace{\left(\hat{\alpha}_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k}\right)^+}_{\frac{\partial \psi^+}{\partial x_k} \hat{\alpha}_k} \psi + m_0 c^2 \underbrace{(\hat{\beta} \psi)^+}_{\psi^+ \hat{\beta}} \psi$$

$-)$

$$\cancel{i\hbar}\left(\psi^+ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi^+}{\partial t} \psi\right) = -\cancel{i\hbar} c \sum_{k=1}^{3} \left(\psi^+ \hat{\alpha}_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + \frac{\partial \psi^+}{\partial x_k} \hat{\alpha}_k \psi\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^+ \psi) = -c \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}(\psi^+ \hat{\alpha}_k \psi)$$

$\hat{}$ im Spin-Raum

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \varrho = \psi^+ \psi = \sum_{i=1}^{4} \psi_i^* \psi_i \quad \text{positiv definit} \to \text{AWD} \\ \underline{j} = c \psi^+ \hat{\underline{\alpha}} \psi \; - \text{Wahrscheinlichkeitsstromdichte} \end{array}} \qquad (6)$$

Einschub: 4-Notation (6 Seiten, vgl. auch 1. Übung)

Einschub: 4-Notation L^2, Bd II, §6

4-Vektor: $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (A^0, \underline{A})$,

wenn sich die Komponenten beim Übergang von einem Inertialsystem (IS) nach IS' gemäß Lorentz-Transformation (LT) transformieren.

<u>z.B.</u>: IS und IS' mit parallelen Achsen, Ursprung von IS' bewegt sich gegen den von IS entlang der x_1 (x) Achse mit $v = const$

$$A^0 = \gamma(A'^0 + \beta A'^1), \quad A^1 = \gamma\left(A'^1 + \frac{v}{c} A'^0\right), \quad A^2 = A'^2, \quad A^3 = A'^3$$

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta := \frac{v}{c}$$

Quadrat des 4-Vektors A^μ (L-invariant)

$$(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2$$

$A^\mu = (A^0, \underline{A})$ kontravarianter 4-Vektor

Führe auch ein

$A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ mit $A_0 = A^0$ und $A_i = -A^i$

also

$A_\mu = (A_0, -\underline{A})$ kovarianter 4-Vektor

Seine Komponenten transformieren sich bei IS $\to$ IS' entsprechend der inversen LT, also im obigen Beispiel

$$A_0 = \gamma(A'_0 - \beta A'_1), \quad A_1 = \gamma(A'_1 - \beta A'_0), \quad A_2 = A'_2, \quad A_3 = A'_3$$

Quadrat des 4-Vektors A^μ nun darstellbar als

$$A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3 = A^\mu A_\mu$$

ab jetzt: (Einstein'sche) Summenkonvention → summiere über Paare gleicher Indizes (einer oben, einer unten), zur Vereinfachung der Notation

$$g^{\mu\nu} := \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & 0 \\ & 0 & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

kontravarianter metrischer Tensor

offensichtlich gilt $g^{\mu\nu} A_\nu = A^\mu$ "Index heben"

Aus der Bedingung $g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \delta^\mu_\nu$

folgt

$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ kontravarianter und kovarianter metrischer Tensor stimmen (für Lorentz-Metrik!) überein

also ist

$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$ "Index senken"

Skalarprodukt: $A^\mu A_\mu = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu$ L-invariant

Transformationseigenschaften der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}; \underline{\nabla}\right) =: \partial_\mu \quad \text{kovarianter}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\underline{\nabla}\right) =: \partial^\mu \quad \text{kontravarianter}$$

4-Gradient

wir haben z.B. $\underbrace{d\phi}_{\text{Skalar}} = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \underbrace{dx^\mu}_{\text{kontravarianter 4-Vektor}}$

also müssen sich die Ableitungen wie die Komponenten eines kovarianten 4-Vektors transformieren –

die Notation $\frac{\partial}{\partial x^\mu} =: \partial_\mu$ mit Index unten bringt das zum Ausdruck

---

Erinnere: Mechanik, Spez. RT und E-Dynamik haben u.U. 4-Vektoren mit einer imaginären Komponente verwendet.

$A = \{\underline{A}, iA_0\}$ – 4-Vektor in Minkowski-Notation

z.B.

$x = \{x, y, z, ict\} \to$ 4-Radiusvektor

$\left\{\underline{\nabla}, \frac{\partial}{i\,\partial(ct)}\right\} \to$ 4-Gradient

Beispiele:

- $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \underline{r})$

– Ereignis, 4-Radiusvektor (kontravariant)

Raum und Zeit zur 'Raumzeit' verknüpft

$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (ct, -\underline{r})$ (kovariant)

analog $x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu$

Abstand (L-invariant)

$$ds = (dx^\mu dx_\mu)^{1/2} = (c^2 dt^2 - (d\underline{r})^2)^{1/2} = c\,dt \Big[1 - \big(\underbrace{\tfrac{1}{c}\tfrac{d\underline{r}}{dt}}_{\beta}\big)^2\Big]^{1/2} \Rightarrow$$

$$ds = \frac{c}{\gamma} dt = c\,d\tau \quad \text{mit } \gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$$

↳ τ – Eigenzeit im (momentanen) Ruhesystem

da ds, c und $d\tau$ L-invariant, sind s und τ zur Parametrisierung der Raumzeit geeignet

$$x^\mu(\tau) = (c\,t(\tau), \underline{r}(\tau))$$

- 4-Geschwindigkeit

aus $dx^\mu = (c\,dt, d\underline{r})$ folgt

$$u^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau} \underset{d\tau = \frac{dt}{\gamma}}{=} \gamma(c, \dot{\underline{r}}).$$ Also ist (als von 4-Vekt. Skalarprodukt)

$$u^\mu u_\mu = \gamma^2 (c^2 - v^2) = \frac{1}{1-\beta^2}(c^2 - v^2) = \frac{c^2 - v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = c^2$$

invariant unter $IS \xrightarrow{LT} IS'$

4-Impuls

$$p^\mu := m_0 u^\mu = m_0\gamma(c, \dot{\underline{r}}) = (mc, m\dot{\underline{r}})$$

mit $m = m_0\gamma = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, $v := |\dot{\underline{r}}|$.

Wir identifizieren die (zeitartige) Komponente p^0 mit $\frac{E}{c}$ (d.h. $\frac{E}{c} = mc$, also $E = mc^2$) $\rightarrow$

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \underline{p}\right) \quad \text{4-Impuls}$$

Für das (L-invariante) Quadrat der Länge des 4-Impulses haben wir

$$p^\mu p_\mu = m_0^2 u^\mu u_\mu = m_0^2 c^2$$

und

$$p^\mu p_\mu = \left(\frac{E}{c}, \underline{p}\right)\left(\frac{E}{c}, -\underline{p}\right) = \frac{E^2}{c^2} - p^2$$

$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m_0 c^2$ ist die relativ. Energie-Impuls-Relation

$$E^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4$$

4-Impulsoperator

$$\hat{p}^\mu := -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} = -i\hbar\, \partial^\mu = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, \underline{\nabla}\right)$$

kontravariant ↑ kovariant

$$\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu = -\hbar^2 \partial^\mu \partial_\mu = -\hbar^2\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \underline{\nabla}^2\right) = -\hbar^2 \Box$$

L-invariant

usw.

Ende Einschub 4-Notation