

$$\left(\square + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0$$

- "+" - relativistisch invariant
- "+" - nichtrelat. Grenzfall ist SG \rightarrow
KGG beschreibt Spin-0-T.
- "+" - Hinweise auf T./Anti-T. Problematik \rightarrow
Ladungsinterpretation
Vielteilchentheorie
- "-" - spinlose T. und fehlende Wahrscheinlichkeits-
interpretation in Kontinuitätsgl.

Erinnere Mechanik (Zusatz)

Bewegungsgleichungen f. Wellenfelder aus

$$\delta \int d^4x \mathcal{L}(\psi_\nu, \frac{\partial \psi_\nu}{\partial x^\mu}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \psi_\nu}{\partial x^\mu})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\nu} = 0$$

Lagrange-Dichte
Euler-Lagrange-Gl.

Beisp. Mechanik / E-Dynamik: Ableitung der Maxwell'schen Gl.

Mit führt

$$\mathcal{L}(\psi, \psi^*, \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu}, \frac{\partial \psi^*}{\partial x^\nu}) = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial \psi^*}{\partial x^\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \psi^* \psi \right)$$

auf KGG für ψ und ψ^* , z.B.

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \psi + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0$$

1) Korrektur zur letzten Woche: nichtrelat. Grenzfall der KGG

Ansatz: $\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}, t) e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t}$

langsame zeitliche Variation \hookrightarrow "Einhüllende" schnell oszill. Beitrag

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{i}{\hbar} m_0 c^2 \psi \right) e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} \right] = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{2i}{\hbar} m_0 c^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2} \psi \right) e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t}$$

siehe 1.00

2. DIRAC-Gleichung (DG)

Relativ. invariante Wellenglg. für Spin- $\frac{1}{2}$ -T.

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi = c \hat{\underline{\alpha}} \hat{\underline{p}} \psi + m_0 c^2 \hat{\beta} \psi$$

Dirac (1928)

(1)

(freie T.)

Was bedeuten die Größen in (1)?

↑ natürlich keine Wellenfung

- Raum und Zeit "gleichberechtigt", beide Ableitungen 1. Ordnung

- $\hat{\beta}_i, \hat{\alpha}_i$ ($i=1,2,3$) können keine Zahlen sein (Drehinvarianz)

- ψ kann keine skalare Fkt. sein, schreibe

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

da nichtrelat. Grenzfall Pauli-Gleichung Vermutung ψ Spinor

$$\psi \in \mathcal{X} = \mathcal{X}_B \times \mathcal{X}_S$$

Bahn Spin

dann sind $\hat{\alpha}_i$ und $\hat{\beta}$ $n \times n$ Matrizen und (1) ein System aus n gekoppelten Differentialglgn. 1. Ordnung für n Spinor-Komponenten ψ_i

- fordere \hat{H} hermitesch

$$\hat{H}^\dagger = c \hat{\underline{p}}^\dagger \hat{\underline{\alpha}}^\dagger + m_0 c^2 \hat{\beta}^\dagger \stackrel{!}{=} \hat{H}$$

wenn $\hat{\underline{\alpha}}$ und $\hat{\beta}$ hermitesch und $[\underline{\alpha}, \hat{\underline{p}}] = 0$
(außer, da $\hat{\underline{\alpha}}$ nicht in \mathcal{X}_B wirken)

- fordern Erfüllung der relativ. Energie - Impuls - Relation

$\hat{H} \frac{\partial}{\partial t} \psi$ (1) und iterieren ergibt

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \\
 & = (c \hat{\underline{\alpha}} \cdot \hat{\underline{P}} + m_0 c^2 \hat{\beta}) (c \hat{\underline{\alpha}} \cdot \hat{\underline{P}} + m_0 c^2 \hat{\beta}) \psi = \\
 & = \left[c^2 (\hat{\underline{\alpha}} \cdot \hat{\underline{P}})(\hat{\underline{\alpha}} \cdot \hat{\underline{P}}) + m_0 c^3 (\hat{\underline{\alpha}} \cdot \hat{\underline{P}} \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\underline{\alpha}} \cdot \hat{\underline{P}}) + m_0^2 c^4 \hat{\beta}^2 \right] \psi = \\
 & = c^2 \sum_{i,j=1}^3 \hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_j \hat{P}_i \hat{P}_j + m_0 c^3 \sum_{i=1}^3 (\hat{\alpha}_i \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}_i) \hat{P}_i + m_0^2 c^4 \hat{\beta}^2 \psi =
 \end{aligned}$$

$$\hat{H} = (c^2 \hat{\underline{P}}^2 + m_0^2 c^4) \psi$$

Folgerungen : 1) $\sum_{i,j=1}^3 \hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_j \hat{P}_i \hat{P}_j = \hat{\underline{P}}^2$

$$\Rightarrow (\hat{\alpha}_i)^2 = \mathbb{1}$$

$$\hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_j + \hat{\alpha}_j \hat{\alpha}_i = 0 \quad i \neq j \quad (2)$$

$$2) (\hat{\beta}_i)^2 = \mathbb{1} \quad (3)$$

$$3) \hat{\alpha}_i \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}_i = 0 \quad (4)$$

Fazit: $\hat{\alpha}_i$ und $\hat{\beta}$ sind hermitesche anti-kommutierende $n \times n$ Matrizen vom Betrag $\mathbb{1}$

⊙ Eigenwerte (EW) der Matrizen $\hat{\alpha}_i$ ($i=1,2,3$) und $\hat{\beta}$

Da $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}$ hermitesch \rightarrow EW reell. Aus $\hat{\alpha}_i^2 = \mathbb{1}$ und $\hat{\beta}^2 = \mathbb{1}$ folgt: EW sind ± 1 .

erinnere:

$$\hat{\alpha}_i = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ 0 & & A_n \end{pmatrix} \text{ in Diagonaldarstellung mit EW } A_1, A_2, \dots, A_n$$

(EW einer Matrix darstellungsunabhängig) ²⁾

$$\hat{\alpha}_i^2 = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^2 & & 0 \\ & A_2^2 & \\ 0 & & A_n^2 \end{pmatrix} \Rightarrow A_k^2 = 1, A_k = \pm 1, k=1, \dots, n$$

⊙ $\hat{\alpha}_i$ und $\hat{\beta}$ haben Spur gleich Null \Rightarrow n gerade

denn $\hat{\alpha}_i \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}_i \stackrel{(4)}{=} 0$ | $\cdot \hat{\beta}$ von rechts $\hat{\alpha}_i \hat{\beta}^2 = -\hat{\beta} \hat{\alpha}_i \hat{\beta}$

da stets $Sp(\hat{\alpha} \cdot \hat{\beta}) = Sp(\hat{\beta} \cdot \hat{\alpha})$ folgt

$$Sp(\hat{\alpha}_i) = -Sp(\hat{\beta} \hat{\alpha}_i \hat{\beta}) = -Sp(\hat{\beta}^2 \hat{\alpha}_i) = -Sp(\hat{\alpha}_i), \text{ also } Sp(\hat{\alpha}_i) = 0$$

analog für $\hat{\beta}$.

1) Spur einer Matrix ist gleich der Summe der EW ¹⁾ \Rightarrow unter den EW von $\hat{\alpha}_i$ und $\hat{\beta}$ treten $+1$ und -1 gleich häufig auf, also sind $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}$ Matrizen gerader Dimension n

$\xrightarrow{-5-}$

1) erinnere QHE: \hat{U} diagonalisiere $\hat{\alpha}_i$ $\hat{U} \hat{\alpha}_i \hat{U}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ 0 & & A_n \end{pmatrix}$

also $Sp(\hat{U} \hat{\alpha}_i \hat{U}^{-1}) = Sp(\hat{\alpha}_i \hat{U} \hat{U}^{-1}) = Sp(\hat{\alpha}_i) = \sum_{k=1}^n A_k$

LS RS

2) $\hat{A} \psi_\alpha = \alpha \psi_\alpha \xrightarrow{\hat{U}} \hat{U} \hat{A} \hat{U}^{-1} \hat{U} \psi_\alpha = \alpha \hat{U} \psi_\alpha \rightarrow$ die "gedrehten"

\uparrow unitär

Matrix $\hat{A}' = \hat{U} \hat{A} \hat{U}^{-1}$ hat die "gedrehten" Eigenvektoren $\psi'_\alpha = \hat{U} \psi_\alpha$ mit demselben EW α

⊙ Wahl der Ordnung n der quadratischen Matrizen $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}$

$n=2$: es gibt nur drei anti-kommutierende 2×2 Matrizen (die drei Pauli-Matrizen) statt der benötigten vier.

$n=4$: niedrigste Ordnung, in der die Forderungen der Algebra (2)-(4) erfüllt werden können

⊙ mögliche explizite Darstellung der Dirac-Matrizen

$$\hat{\alpha}_i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_i \\ \hat{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix}, i=1,2,3 \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(ohne Beweis } \rightarrow \text{prüfen!)} \quad (5a)$$

wobei die $\hat{\sigma}_i$ die aus QM I bekannten Pauli'schen Spinmatrizen

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5b)$$

Physikalische Interpretation d. Dirac-Glg

c1): $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\hbar c \sum_{k=1}^3 \hat{\alpha}_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + m_0 c^2 \hat{\beta} \psi$ (freie P.)

o Kontinuitätsglg., Wahrscheinlichkeitsinterpretation

versuche Darstellung $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \underline{j} = 0$, $\rho \stackrel{?}{=} |\psi|^2$

berechne $\psi^\dagger (\partial_t \psi) - (\partial_t \psi^\dagger) \psi$

$$\begin{aligned} \psi^\dagger i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -i\hbar c \psi^\dagger \sum_{k=1}^3 \hat{\alpha}_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + m_0 c^2 \psi^\dagger \hat{\beta} \psi \\ -i\hbar \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \psi &= i\hbar c \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x_k} \hat{\alpha}_k \right) \psi + m_0 c^2 \underbrace{(\hat{\beta} \psi)^\dagger}_{\psi^\dagger \hat{\beta}} \psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i\hbar \left(\psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \psi \right) &= -i\hbar c \sum_{k=1}^3 \left(\psi^\dagger \hat{\alpha}_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x_k} \hat{\alpha}_k \psi \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) &= -c \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\psi^\dagger \hat{\alpha}_k \psi \right) \end{aligned}$$

↑ im Spin-Raum

⇒ $\rho = \psi^\dagger \psi = \sum_{i=1}^4 \psi_i^\dagger \psi_i$ positiv definit → AWD (6)

$\underline{j} = c \psi^\dagger \hat{\underline{\alpha}} \psi$ - Wahrscheinlichkeitsstromdichte

Einschub: 4-Notation (6 Seiten, vgl auch 1. Übung)

4-Vektor: $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (A^0, \underline{A})$.

Wenn sich die Komponenten beim Übergang von einem Inertialsystem (IS) nach IS' gemäß Lorentz-Transformation (LT) transformieren.

z.B.: IS und IS' mit parallelen Achsen, Ursprung von IS' bewegt sich gegen den von IS entlang der x_1 (x) Achse mit $v = \text{const}$

$$A^0 = \gamma(A'^0 + \beta A'^1), \quad A^1 = \gamma(A'^1 + \frac{v}{c} A'^0), \quad A^2 = A'^2, \quad A^3 = A'^3$$

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta := \frac{v}{c}$$

Quadrat des 4-Vektors A^μ (L-invariant)

$$(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2$$

$$A^\mu = (A^0, \underline{A}) \quad \text{kovarianter 4-Vektor}$$

Führe auch ein

$$A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3) \quad \text{mit } A_0 = A^0 \text{ und } A_i = -A^i$$

also

$$A_\mu = (A_0, -\underline{A}) \quad \text{kovarianter 4-Vektor}$$

Seine Komponenten transformieren sich bei IS \rightarrow IS' entsprechend der inversen LT, also im obigen Beispiel

$$A_0 = \gamma(A'^0 - \beta A'^1), \quad A_1 = \gamma(A'^1 - \beta A'^0), \quad A_2 = A'^2, \quad A_3 = A'^3$$

Quadrat des 4-Vektors A^μ nun darstellbar als

$$A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3 = A^\mu A_\mu$$

ab jetzt: (Einstein'sche) Summenkonvention \rightarrow
 summiere über Paare gleicher Indizes (einer oben, einer
 unten), zur Vereinfachung der Notation

$$g^{\mu\nu} := \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

kontravarianter metrischer Tensor

offensichtlich gilt $g^{\mu\nu} A_\nu = A^\mu$ "Index heben"

Aus der Bedingung $g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \delta^\mu_\nu$

folgt

$$g^{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

kontravarianter und kovarianter
 metrischer Tensor stimmen (für hermitz-
 Metrik!) überein

also ist

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$$

"Index senken"

Skalarprodukt: $A^\mu A_\mu = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu$ L-invariant

Transformations eigenschaften der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \underline{\nabla} \right) =: \partial_\mu \quad \text{kovariant} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{4-Gradient}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\underline{\nabla} \right) =: \partial^\mu \quad \text{kontravariant}$$

wir haben z.B. $d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} dx^\mu$

↓ Skalar ↓ also müssen sich die Ableitungen wie die Komponenten eines kovarianten 4-Vektors transformieren - die Notation $\frac{\partial}{\partial x^\mu} =: \partial_\mu$ mit Index unten bringt das zum Ausdruck

↓ kontravarianter 4-Vektor

Erinnerung: Mechanik, Spez. RT und E-Dynamik haben u.U. 4-Vektoren mit einer imaginären Komponente verwendet.

$A = \{ \underline{A}, iA_0 \}$ - 4-Vektor in Minkowski-Notation

z.B.

$x = \{ x, y, z, ict \}$ → 4-Radiusvektor

$\left\{ \underline{\nabla}, \frac{\partial}{i\partial(ict)} \right\}$ → 4-Gradient

Beispiele

-4-

$$\textcircled{1} X^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \underline{x})$$

- Ereignis, 4-Radiusvektor (kontravariant)

Raum und Zeit zur 'Raumzeit' verknüpft

$$X_\mu = g_{\mu\nu} X^\nu = (ct, -\underline{x}) \quad (\text{kovariant})$$

$$\text{analog } x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu$$

Abstand (L-invariant)

$$ds = (dx^\mu dx_\mu)^{1/2} = (c^2 dt^2 - (d\underline{x})^2)^{1/2} = c dt \left[1 - \underbrace{\left(\frac{1}{c} \frac{d\underline{x}}{dt} \right)^2}_{\beta^2} \right]^{1/2} \Rightarrow$$

$$ds = \frac{c}{\gamma} dt = c d\tau \quad \text{mit } \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$$

↳ τ -Eigenzeit im (momentanen) Ruhesystem

da ds , c und $d\tau$ L-invariant, sind s und τ zur Parametrisierung der Raumzeit geeignet

$$X^\mu(\tau) = (ct(\tau), \underline{x}(\tau))$$

4-Geschwindigkeit

aus $dx^\mu = (cdt, d\underline{x})$ folgt

$$u^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau} = \underset{d\tau = \frac{dt}{\gamma}}{\uparrow} \gamma (c, \underline{\dot{x}}) \quad \text{also ist } \left(\text{als von 4-Vekt. Skalarprodukt} \right)$$

$$u^\mu u_\mu = \gamma^2 (c^2 - v^2) = \frac{1}{1 - \beta^2} (c^2 - v^2) = \frac{c^2 - v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = c^2$$

invariant unter $IS \xrightarrow{LT} IS'$

4-Impuls

- 5 -

$$p^\mu := m_0 u^\mu = m_0 \gamma (c, \underline{v}) = (mc, m\underline{v})$$

$$\text{mit } m = m_0 \gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad v := |\underline{v}|$$

Wir identifizieren die (zeitartige) Komponente p^0 mit $\frac{E}{c}$ (d.h. $\frac{E}{c} = mc$, also $E = mc^2$) \rightarrow

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \underline{p} \right) \quad \text{4-Impuls}$$

Für das (L-invariante) Quadrat der Länge des 4-Impulses haben wir

$$p^\mu p_\mu = m_0^2 u^\mu u_\mu = m_0^2 c^2$$

und

$$p^\mu p_\mu = \left(\frac{E}{c}, \underline{p} \right) \left(\frac{E}{c}, -\underline{p} \right) = \frac{E^2}{c^2} - \underline{p}^2$$

$\frac{E^2}{c^2} - \underline{p}^2 = m_0^2 c^2$ ist die relativ. Energi-Impuls-Relation

$$E^2 = c^2 \underline{p}^2 + m_0^2 c^4$$

o 4- Impulsooperatoren

-6-

$$\hat{p}^\mu := -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} = -i\hbar \partial^\mu = -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, \underline{0} \right)$$

contravariant \uparrow covariant

$$\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu = -\hbar^2 \partial^\mu \partial_\mu = -\hbar^2 \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, -\nabla^2 \right) = -\hbar^2 \square$$

L-invariant

usw.

Ende Einschluss 4-Notation