Prof. Dr. Harald Engel
Dipl. Phys. Mathias Hayn
Wassilij Kopylov, M.Sc.

1. Übungsblatt – Quantenmechanik II

Abgabe: Di. 6. 11. 2012 bis 18:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummer und das Tutorium an!

Aufgabe 1 (6 Punkte): *Lorentz-Kovarianz der Klein–Gordon-Gleichung*

In dieser Aufgabe sollen Sie zeigen, dass die Klein–Gordon-Gleichung invariant unter Lorentz-Transformationen ist. Bevor Sie das tun, leiten Sie die Relation

$$\Lambda^{\rho}{}_{\mu} g_{\rho\sigma} \Lambda^{\sigma}{}_{\nu} = g_{\mu\nu} \tag{1}$$

für den metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ und die Lorentz-Transformation $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ her. Benutzen Sie dazu die Eigenschaft der Lorentz-Transformationen, dass diese die Länge eines Vektors im Minkowski-Raum invariant lässt, d.h. $x_\mu x^\mu = x'_\mu x'^\mu$, mit $x'^\mu = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^\nu$. Beachten Sie die Summenkonvention bei doppelt auftretenden kontra und kovarianten Indizes, $\Lambda^{\rho}{}_{\mu}\, g_{\rho\sigma} \equiv \sum_{\rho=1}^{4} \Lambda^{\rho}{}_{\mu}\, g_{\rho\sigma}$.
Zeigen Sie außerdem unter Verwendung der Gleichung (1), dass für die Lorentz-Transformation

$$\Lambda^{\nu}{}_{\mu} = g_{\mu\rho} \big(\Lambda^{-1}\big)^{\rho}{}_{\lambda}\, g^{\lambda\nu} \tag{2}$$

gilt.
Zeigen Sie nun explizit unter Zuhilfenahme der Gleichung (2), dass die Klein–Gordon-Gleichung, $\big(\Box + \frac{1}{\lambda^2}\big)\varphi(x) = 0$, ($\Box = \partial^\mu \partial_\mu$, $\lambda = \frac{\hbar c}{m_0 c^2}$), invariant unter Lorentz-Transformationen,

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^\nu, \tag{3}$$
$$\varphi(x^\mu) \to \varphi'(x'^\mu) = S(\Lambda)\varphi(x), \tag{4}$$

ist. Hier ist $S(\Lambda)$ eine lineare Darstellung der Lorentz-Gruppe. Was muss für $S(\Lambda)$ gelten, damit die Klein–Gordon-Gleichung kovariant ist?

Aufgabe 2 (6 Punkte): *Kontinuitätsgleichung und Problematik der Ein-Teilchen-Interpretation*
Betrachten Sie die Klein-Gordon-Gleichung für ein Teilchen der Masse m_0 im elektromagnetischen Feld $(\Phi, \mathbf{A})$. Die Teilchenladung sei q und die Wellenfunktion ψ erfüllt die Klein-Gordon-Gleichung.

(a) Zeigen Sie, dass die Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial}{\partial x^\mu} j^\mu = 0$ mit $j^\mu = \{c\rho, \mathbf{j}\}$, der Stromdichte $\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2m_0 i}\left(\psi^* \nabla\psi - (\nabla\psi)^*\psi\right) - \frac{q}{m_0 c}\mathbf{A}\,\psi\psi^*$ und der Dichte $\rho = \frac{i\hbar}{2m_0c^2}(\psi^* \frac{\partial}{\partial t}\psi - \psi \frac{\partial}{\partial t}\psi^*) - \frac{q}{m_0 c^2}\Phi\,\psi\psi^*$ erfüllt ist.

(b) Betrachten Sie den Fall $\Phi = \mathbf{A} = 0$. Eine mögliche Lösung der Klein-Gordon-Gleichung für das freie Teilchen in einer Dimension ist $\psi(x,t) = e^{i(px-Et)/\hbar}$. Berechnen Sie hierfür $E(p)$ und ρ. Interpretieren Sie die Ergebnisse. Konstruieren Sie anschließend durch eine geeignete Überlagerung die Wellenfunktion eines neutralen Teilchens. Wie groß sind dann j und ρ?

(c) Wir betrachten jetzt das Teilchen in einem statischen elektrischen Feld, d.h. $\Phi = \Phi(r) \neq 0, \mathbf{A} = 0$. Zeigen Sie, dass die Klein-Gordon-Gleichung mit dem Separationsansatz $\psi(r,t) = \tilde{\psi}(r) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ gelöst werden kann und berechnen Sie mit dem Ansatz ρ. Wie hängt das Vorzeichen von ρ mit der Stärke des Potentials Φ zusammen? Wie lässt sich der Befund interpretieren?

Aufgabe 3 (8 Punkte): *Klein–Gordon-Theorie des Atoms*

Untersuchen Sie das Spektrum eines Atoms der Kernladungszahl Z im Rahmen der Klein–Gordon-Theorie. Bringen Sie dazu die Klein–Gordon-Gleichung für ein geladenes relativistisches Teilchen in einem Coulomb-Potential ($\mathbf{A} = \mathbf{0}, q\Phi(r) = -\frac{Z\alpha}{r}\hbar c$) mit Hilfe eines Separation-Ansatzes für stationäre Lösungen mit positiver Energie auf die Form

$$\left[\left(E + Z\alpha\frac{\hbar c}{r}\right)^2 + \left(m_0c^2\right)^2\lambda^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} - \ell(\ell+1)\left(m_0c^2\right)^2\frac{\lambda^2}{r^2} - \left(m_0c^2\right)^2\right]R(r) = 0. \tag{5}$$

Hier ist $\alpha \approx 1/137$ die Feinstrukturkonstante und λ die Compton-Wellenlänge wie in Aufgabe 1. Vergleichen Sie das Eigenwertproblem (5) mit dem des nicht-relativistischen Wasserstoffatoms und zeigen Sie, dass das Spektrum durch

$$E_{n'}^2 = \frac{\left(m_0c^2\right)^2}{1 + Z^2\alpha^2/n'^2} \tag{6}$$

bestimmt ist. Hier ist $n' \in \mathbb{Z}^+$.
Entwickeln sie die Eigenenergien $E_{n'}$ bis zur vierten Ordnung in $Z\alpha$. Beachten Sie dabei, dass n' über das entsprechende ℓ' von $Z\alpha$ abhängt.

Vorlesung:
Di. um 8:30 Uhr – 10:00 Uhr in EW 203,
Do. um 8:30 Uhr – 10:00 Uhr in EW 203.

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien (u.a. mindestens einmal vorrechnen).

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- U. Scherz, Quantenmechanik (Teubner)
- F. Schwabl, Quantenmechanik für Fortgeschrittene (Springer)
- W. Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 5/1,2: Quantenmechanik (Springer)
- W. Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 7: Vielteilchentheorie (Springer)
- C. Cohen-Tannoudji, Quantenmechanik Teil 2 (de Gruyter)
- E. Fick, Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie (Aula-Verlag)

Sprechzeiten:

Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.
Prof. Dr. Harald Engel	Mi	14:30 – 16:00 Uhr	EW 738	79462
Mathias Hayn		nach Vereinbarung	EW 711	27884
Wassilij Kopylov		nach Vereinbarung	EW 705	26143