

Prof. Dr. Harald Engel
 Dipl. Phys. Mathias Hayn
 Wassilij Kopylov, M.Sc.

2. Übungsblatt – Quantenmechanik II

Abgabe: Di. 13. 11. 2012 bis 18:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummer und das Tutorium an!

Aufgabe 4 (4 Punkte): Pauli-Matrizen

Die drei Pauli-Matrizen, σ_i ($i \in \{1, 2, 3\}$), sind unitär, hermitesch und erfüllen die Gleichung $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = i \mathbb{1}$.

- (a) Zeigen Sie, dass die Pauli-Matrizen die Kommutator-Relation, $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \sigma_k$, und die Antikommutator-Relation, $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \mathbb{1}$, erfüllen.
- (b) Zeigen Sie damit, dass $\sigma_i \sigma_j = i \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij} \mathbb{1}$ gilt.
- (c) Zeigen Sie nun die in der Vorlesung benutzte Identität:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \mathbb{1} + i \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}).$$

Hier ist $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ein Vektor mit den drei Pauli-Matrizen als Einträge und $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$, $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$ sind Vektoren mit drei Skalaren als Einträge.

Aufgabe 5 (7 Punkte): Erhaltungsgrößen in der Dirac-Theorie

Der Dirac-Hamiltonian eines freien Teilchens ist $\hat{H} = c \sum_{k=1}^3 \hat{\alpha}^k \hat{p}_k + \hat{\beta} m_0 c^2$. Die Komponenten des Spinoperators $\hat{\mathbf{S}} = (\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3)$ sind durch $\hat{S}_k = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}$ gegeben.

- (a) Zeigen Sie, dass der Drehimpulsoperator $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$ nicht mit \hat{H} vertauscht. Nutzen Sie dafür die Vertauschungsrelationen des Orts- und Impulsoperators.
- (b) Zeigen Sie, dass der Spinoperator ebenfalls nicht mit \hat{H} vertauscht.
- (c) Zeigen Sie schließlich, dass jedoch der Gesamtdrehimpuls $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$ mit \hat{H} vertauscht.

Aufgabe 6 (9 Punkte): Lorentz-Kovarianz der Dirac-Gleichung

In dieser Aufgabe untersuchen wir das Transformationsverhalten der Dirac-Gleichung und der Spinoren unter Lorentz-Transformationen. Dazu betrachten wir zwei durch eine Lorentz-Transformation verbundene Inertialsysteme. Im ersten Inertialsystem genügt der Spinor $\psi(x)$ der Dirac-Gleichung,

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - \mathbb{1}/\lambda) \cdot \psi(x) = 0. \quad (1)$$

Hier ist $\lambda = \frac{\hbar c}{m_0 c^2}$ wieder die Compton-Wellenlänge und für die γ -Matrizen gilt die Antikommutatorrelation $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbb{1}$ mit dem metrischen Tensor $g^{\mu\nu}$. Unter Lorentz-Transformationen transformiert sich der Spinor wie $\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$, mit der noch zu bestimmenden Matrix $S(\Lambda)$, und die Matrizen γ^μ sind Lorentz-Skalare.

2. Übung TPV WS12/13

- (a) Zeigen Sie, dass die Dirac-Gleichung nur dann kovariant ist, wenn die Matrix $S(\Lambda)$ der Gleichung

$$S(\Lambda) \cdot \gamma^\mu \cdot S^{-1}(\Lambda) \Lambda^\nu{}_\mu = \gamma^\nu \quad (2)$$

genügt.

Betrachten Sie nun im Folgenden infinitesimale Lorentz-Transformationen, $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \lambda^\mu{}_\nu$, mit dem Kronecker-Delta $\delta^\mu{}_\nu$ und $\lambda^\mu{}_\nu \ll 1, \forall \mu, \nu$.

- (b) Zeigen Sie, dass $\lambda^\mu{}_\nu$ bis in erster Ordnung in $\lambda^\mu{}_\nu$ antisymmetrisch, d.h. $\lambda^\mu{}_\nu = -\lambda_\nu{}^\mu$, ist.
- (c) Unter infinitesimalen Lorentz-Transformationen gilt für die Matrix $S(\Lambda) = \mathbb{1} + T$, wobei die Matrixelemente von T klein gegen 1 sind. Berechnen Sie die Inverse von $S(\Lambda)$ bis zur ersten Ordnung in T und zeigen Sie, dass aus der Bedingung (2) für $S(\Lambda)$ die Bedingung

$$T \cdot \gamma^\nu - \gamma^\nu \cdot T = \gamma^\mu \lambda_\mu{}^\nu \quad (3)$$

für T folgt. Auch dies gilt nur bis zur ersten Ordnung in T , bzw. $\lambda_\mu{}^\nu$.

- (d) Zeigen Sie schließlich, dass die Matrix

$$T = \frac{1}{4} \lambda_{\mu\nu} \gamma^\mu \cdot \gamma^\nu \quad (4)$$

die Gleichung (3) löst und dass damit die Dirac-Gleichung kovariant ist.

Nun gehen wir zu endlichen Transformationen in der x^α - x^β -Ebene über, welche durch den endlichen Parameter θ charakterisiert sein sollen, $\lambda_{\mu\nu} = (\delta^\alpha{}_\mu \delta^\beta{}_\nu - \delta^\alpha{}_\nu \delta^\beta{}_\mu) \theta$. Wir schreiben $S(\Lambda) \rightarrow S_{\alpha\beta}(\theta)$

- (e) Benutzen Sie die Gruppeneigenschaft der Lorentz-Transformation, d.h. $S(\Lambda_1 + \Lambda_2) = S(\Lambda_1) \cdot S(\Lambda_2)$, um zu zeigen, dass $S_{\alpha\beta}(\theta)$ die Gleichung

$$S_{\alpha\beta}(\theta + \Delta\theta) - S_{\alpha\beta}(\theta) = -\frac{i}{2} S_{\alpha\beta}(\theta) \cdot \sigma^{\alpha\beta} \Delta\theta \quad (5)$$

mit $\Delta\theta \ll 1$ erfüllt. Hier wurden die Matrizen $\sigma^{\alpha\beta} = \frac{i}{2} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta]$ eingeführt. Leiten Sie daraus eine Differentialgleichung für $S_{\alpha\beta}(\theta)$ her und lösen Sie diese.

Vorlesung: Di. um 8:30 Uhr – 10:00 Uhr in EW 203,
Do. um 8:30 Uhr – 10:00 Uhr in EW 203.

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien (u.a. mindestens einmal vorrechnen).

Sprechzeiten:

Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.
Prof. Dr. Harald Engel	Mi	14:30 – 16:00 Uhr	EW 738	79462
Mathias Hayn	Mo	15:00 – 17:00 Uhr	EW 711	27884
Wassilij Kopylov		nach Vereinbarung	EW 705	26143