Prof. Dr. Harald Engel
Dipl. Phys. Mathias Hayn
Wassilij Kopylov, M.Sc.
Jan Totz, M.Sc.

4. Übungsblatt – Quantenmechanik II

Abgabe: Di. 27. 11. 2012 bis 18:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummer und das Tutorium an!

Aufgabe 9 (11 Punkte): *Relativistisches Wasserstoffatom - Teil 2*
Auf dem letzten Übungsblatt haben wir gezeigt, dass der Ansatz für die Wellenfunktion $\psi^{\pm}_{j,m_j}$ das stationäre Problem des relativistischen H-Atoms mit dem Energieeigenwert E löst, wenn die Funktionen $F(\rho)$ und $G(\rho)$ folgendes Differentialgleichungssystem erfüllen:

$$\left(\frac{d}{d\rho} + \frac{k}{\rho}\right) F - \left(\frac{\alpha_2}{\sigma} - \frac{\gamma}{\rho}\right) G = 0\,, \tag{1}$$

$$\left(\frac{d}{d\rho} - \frac{k}{\rho}\right) G - \left(\frac{\alpha_1}{\sigma} + \frac{\gamma}{\rho}\right) F = 0\,. \tag{2}$$

Es wurde dabei folgende Substitution gemacht: $\alpha_1 = m_0 + E, \alpha_2 = m_0 - E, \sigma = \sqrt{m_0^2 - E^2} = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}, \rho = r\sigma, k = \pm(j + \frac{1}{2}), \gamma = Z\alpha$. Jetzt wollen wir dieses DGL-System lösen und daraus das Energiespektrum E bestimmen.

(a) Machen Sie den Ansatz $F(\rho) = f(\rho)\, e^{-\rho}$, $G(\rho) = g(\rho)\, e^{-\rho}$ und lösen Sie das sich ergebende DGL-System für $f(\rho)$, $g(\rho)$ mit dem Potenzreihenansatz $g(\rho) = \rho^s \sum_\nu a_\nu\, \rho^\nu$, $f(\rho) = \rho^s \sum_\nu b_\nu\, \rho^\nu$, wobei $s > 1$ ist. Durch einen Vergleich der Koeffizienten für $\rho^{s+\nu-1}$ erhalten Sie dann

$$(s + \nu + k) b_\nu - b_{\nu-1} + \gamma a_\nu - \frac{\alpha_2}{\sigma} a_{\nu-1} = 0\,,$$
$$(s + \nu - k) a_\nu - a_{\nu-1} - \gamma b_\nu - \frac{\alpha_1}{\sigma} b_{\nu-1} = 0\,. \tag{3}$$

(b) Leiten Sie aus (3) eine Bedingung für s ab: $s = \sqrt{k^2 - \gamma^2}$. Tipp: Betrachten Sie den Fall $\nu = 0$.

(c) Kommen Sie mithilfe von (3) auf die Relation:

$$b_\nu[\sigma(s + \nu + k) + \alpha_2\gamma] = a_\nu[\alpha_2(s + \nu - k) - \sigma\gamma]\,. \tag{4}$$

Argumentieren Sie nun, weshalb die angesetzte Potenzreihe nach einem bestimmten ν, sei dieses $\nu = N$, abbrechen muss. Wie groß sind dann a_{N+1}, b_{N+1}? Zeigen Sie damit, dass die Abbruchbedingung $\alpha_2 a_N = -\sigma b_N$ lautet.

(d) Benutzen Sie nun die Gleichung (4) und die Abbruchbedingung, um schlussendlich die Gleichung für die Energie E zu erhalten. Reinstallieren Sie außerdem wieder $\hbar$ und c so, dass die richtige Einheit für die Energie herauskommt. Man erhält ($n \equiv N + j + \frac{1}{2}$)

$$E = m_0 c^2 \left[1 + \left(\frac{\gamma}{s + N}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = m_0 c^2 \left[1 + \left(\frac{Z\alpha}{n - (j + \frac{1}{2}) + \sqrt{(j + \frac{1}{2})^2 - (Z\alpha)^2}}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

Vergleichen Sie diese Energie mit dem Ergebnis aus Aufgabe 3.

Aufgabe 10 (9 Punkte): *Potentialschwelle in der Dirac-Theorie*

In $(1+1)$ Dimensionen lässt sich die Dirac-Gleichung mit einem äußeren Potential $V(x)$ in der Form ($\hbar = c = 1$)

$$i\,\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \left(-i\,\sigma_1\,\frac{\partial}{\partial x} + \sigma_3\, m_0 + V(x)\mathbb{1}\right)\cdot\psi(x,t) \tag{6}$$

schreiben. Hier sind σ_1 und σ_3 Pauli-Matrizen mit $\sigma_1\sigma_3 = -i\sigma_2$, m_0 ist die Masse des Teilchens und $\psi(x,t)$ ist ein zwei-komponentiger Spinor.

(a) Schreiben Sie für ein konstantes Potential $V(x) = V$ die stationäre Dirac-Gleichung im Impulsraum, lösen Sie das Eigenwertproblem und zeigen Sie damit, dass ebene Wellen mit dem Impuls k der Form

$$\varphi(x) \sim \begin{pmatrix} m_0 + E - V \\ k \end{pmatrix} \mathrm{e}^{ikx} \tag{7}$$

die stationäre Dirac-Gleichung im Ortsraum erfüllen. Dabei sei $E > m_0$ die Energie des Elektrons. Was gilt für k? Ist k immer reell? Was bedeutet dies für die Lösung $\varphi(x)$?

(b) Betrachten Sie nun ein von links einlaufendes Elektron mit dem Impuls k und der Energie E in einem stückweise konstanten Potential der Form $V(x) = 0,$ für $x < 0$ und $V(x) = V,$ für $x \geq 0$, $V > 0$. Benutzen Sie Aufgabenteil (a) um die Form der einfallenden (φ_e), der an der Potentialschwelle reflektierten (φ_r) und der die Potentialschwelle durchdringenden (φ_t) Welle zu bestimmen. Was gilt für die Spinoren an der Grenzfläche $x = 0$? Leiten Sie daraus Bedingungen für die Koeffizienten der drei Wellen ab.

(c) Die Stromdichte j ist allgemein über $j = \varphi(x)^\dagger \cdot \sigma_1 \cdot \varphi(x)$ definiert. Bestimmen Sie die Stromdichte für die einfallende (j_e), die reflektierte (j_r) und die durchgehende (j_t) Welle.

(d) Bestimmen Sie den Reflexionskoeffizienten $R = -j_r/j_e$ und den Transmissionskoeffizienten $T = 1 - R$ im Grenzfall $E \gg V, m_0$.

(e) Was passiert mit dem Impuls der transmittierten Welle φ_t für den Fall, dass $V + m_0 > E > V - m_0$? Was bedeutet das physikalisch? Wie sehen R und T hier aus?

(f) Was passiert mit dem Impuls der Welle φ_t für den Fall, dass $E < V - m_0$? Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Vorlesung:
Di. um 8:30 Uhr – 10:00 Uhr in EW 203,
Do. um 8:30 Uhr – 10:00 Uhr in EW 203.

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien (u.a. mindestens einmal vorrechnen).

Sprechzeiten:

Name	**Tag**	**Zeit**	**Raum**	**Tel.**
Prof. Dr. Harald Engel	Mi	14:30 – 16:00 Uhr	EW 738	79462
Mathias Hayn	Mo	15:00 – 17:00 Uhr	EW 711	27884
Wassilij Kopylov		nach Vereinbarung	EW 705	26143
Jan Totz		nach Vereinbarung	EW 627	27681