

Prof. Dr. Harald Engel  
 Dipl. Phys. Mathias Hayn  
 Wassilij Kopylov, M.Sc.  
 Jan Tötz, M.Sc.

**10. Übungsblatt – Quantenmechanik II**

**Abgabe: Di. 29. 1. 2013 bis 18:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes**

*Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!*

**Aufgabe 22 (5 Punkte):** Zeitunabhängige Störungstheorie nichtentarteter Zustände

Zeigen Sie, dass sich der Ausdruck für die Energie unter einer kleinen Störung folgendermaßen entwickeln lässt:

$$E_n = E^{(0)} + \langle n^{(0)} | \hat{H}_1 | n^{(0)} \rangle + \sum_{k \neq n} \frac{|\langle k^{(0)} | \hat{H}_1 | n^{(0)} \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}, \tag{1}$$

wobei der Hamiltonian durch  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$  gegeben ist und  $|n^{(0)}\rangle$  sowie  $|k^{(0)}\rangle$  Eigenzustände von  $\hat{H}_0$  mit korrespondierenden Eigenwerten  $E_n^{(0)}$  und  $E_k^{(0)}$  sind. Interpretieren Sie das Ergebnis und erklären Sie, wann die 2. Ordnung eine Rolle spielt.

**Aufgabe 23 (15 Punkte):** Lamb-Verschiebung im Wasserstoffatom

In dieser Aufgabe untersuchen wir die Wirkung des Photonenvakuums auf die elektronische Energie störungstheoretisch. Wir betrachten ein im Wasserstoffatom gebundenes Elektron im Zustand  $|n\rangle$  und das Photonenvakuum. Der ungestörte Zustand  $|\phi_0\rangle$  lässt sich somit schreiben als  $|\phi_0\rangle = |n\rangle |0\dots 0\rangle$ . Die Materie-Licht-Wechselwirkung wird durch  $\hat{H}_{int} = -\frac{q}{m_{exp}c} \vec{A} \cdot \vec{p}$  beschrieben, wobei  $\vec{p}$  der Impuls und  $\vec{A}$  das quantisierte Vektorpotential ist, d.h.  $\vec{A} = \sum_{\vec{k}, \sigma} N_k \vec{\epsilon}_{k\sigma} \cdot (\hat{c}_{k\sigma} \cdot e^{i\vec{k}\vec{r}} + \hat{c}_{k\sigma}^\dagger e^{-i\vec{k}\vec{r}})$ . Hier sind  $N_k^2 = \frac{2\pi\hbar c^2}{L^3\omega_k}$  die Normierung,  $\vec{\epsilon}_{k\sigma}$  die Polarisation,  $\hat{c}_{k\sigma}, \hat{c}_{k\sigma}^\dagger$  die Vernichter/Erzeuger-Operatoren für die Photonen. Der Gesamthamiltonian wäre dann  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \sum \hbar\omega_k \hat{c}_{k\sigma}^\dagger \hat{c}_{k\sigma} + \hat{H}_{int}$  mit  $\hat{H}_0 = \frac{p^2}{2m_{exp}} + V_{kern}$  aus dem Wasserstoffproblem.

1. Zeigen Sie, dass die erste Ordnung Störungstheorie keinen Beitrag leistet und man für die zweite Ordnung störungstheoretisch folgende Energiekorrektur erhält ( $\omega_k = ck$ )

$$E_n^{(2)} = \frac{q^2}{m_{exp}^2 c^2} \sum_m \sum_{k\sigma} N_k^2 \frac{|\langle m | \vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_{k\sigma} | n \rangle|^2}{E_n - E_m - \hbar\omega_k}. \tag{2}$$

Benutzen Sie dazu auch die Dipolnäherung  $exp(i\vec{k}\vec{r}) \approx 1$ .

2. Werten Sie nun die Gleichung (2) weiter aus, in dem Sie die Gültigkeit von  $\sum_\sigma |\vec{p}\vec{\epsilon}_{k\sigma}|^2 = p^2(1 - \cos^2(\theta)), \theta = \angle(\vec{p}, \vec{k})$  zeigen und die Summe geeignet ins Integral überführen. Sie erhalten dann

$$E_n^{(2)} = \frac{2q^2\hbar}{3\pi m_{exp}^2 c} \int_0^\infty dk k \sum_m \frac{|\langle m | \vec{p} | n \rangle|^2}{E_n - E_m - \hbar ck}. \tag{3}$$

Wie groß ist diese Energiekorrektur?

10. Übung TPV WS12/13

3. Wir berücksichtigen nun die Massenrenormierung nach Bethe und erhalten die messbare Energiedifferenz, in dem wir die Gleichung (3) mit der Energiekorrektur des freien Elektrons

$$E_n^{2,free} = -\frac{2q^2\hbar}{3\pi m_{exp}^2 c} \int_0^\infty dk \sum_m \frac{|\langle m|\vec{p}|n\rangle|^2}{\hbar c} \text{ korrigieren:}$$

$$\Delta E_n^{(2)} = \frac{2q^2\hbar}{3\pi m_{exp}^2 c} \int_0^\infty dk k \sum_m |\langle m|\vec{p}|n\rangle|^2 \frac{E_n - E_m}{\hbar kc(E_n - E_m - \hbar ck)}. \quad (4)$$

Falls (4) nicht konvergiert, vergleichen Sie die Divergenz von (4) mit (3) für große  $k$ -Werte.

4. Relativistisch korrekte Rechnung lässt sich in dieser Theorie durchs Beschränkung/Abschneiden der Integration von  $\infty$  auf  $k_{Compt} = \frac{m_{exp}c}{\hbar}$  simulieren. Werten Sie damit die Energiekorrektur (4) weiter aus. Für  $m_{exp}c^2 \gg (E_m - E_n)$  erhält man

$$\Delta E_n^2 = \frac{2q^2}{3\pi\hbar m_{exp}^2 c^3} \sum_m |\langle m|\vec{p}|n\rangle|^2 (E_m - E_n) \log \left| \frac{m_{exp}c^2}{E_m - E_n} \right|. \quad (5)$$

5. Jetzt gilt es noch die  $\sum_m$  in (5) weiter auszurechnen. Man erhält

$$\Delta E_n^{(2)} = \frac{4}{3} Z \cdot \frac{q^4\hbar}{m_{exp}^2 c^3} |\psi_n(0)|^2 \log \left| \frac{m_{exp}c^2}{E_m - E_n} \right|. \quad (6)$$

Dazu müssen Sie folgende Hinweise verwenden i) Ersetzen Sie  $(E_m - E_n)$  unter dem Logarithmus durch einen Mittelwert  $\overline{E_m - E_n}$  und ziehen Sie den Term vor die Summe; ii) Zeigen und verwenden Sie die Relation  $\sum_m |\langle m|\vec{p}|n\rangle|^2 (E_m - E_n) = \langle n|\vec{p}[\hat{H}_0, \vec{p}]|n\rangle$ ,  $\hat{H}_0$  ist der Hamiltonoperator des Wasserstoffatoms; iii) Berechnen Sie den Kommutator und das Skalarprodukt (partielle Integration), um  $\langle n|\vec{p}[\hat{H}_0, \vec{p}]|n\rangle = -\frac{\hbar^2}{2} \int d^3x |\psi_n|^2 \nabla^2 V$  zu beweisen.

6. Wie verändern sich qualitativ die Energien von den  $2S_{1/2-}, 2P_{1/2-}, 2P_{3/2-}$  Zuständen im Vergleich zu der Rechnung mit der Dirac-Gleichung? Beantworten Sie diese Frage mithilfe einer Skizze. Kennzeichnen Sie die Lambverschiebung. Wie groß ist diese für  $n = 2$ , vergleichen Sie das Ergebnis mit dem experimentel ermittelten Wert von 1057 MHz. Sie brauchen dazu i)  $\overline{E_m - E_2} = 242.2eV$  ii) Die Gleichung (6) ist in CGS gültig, wo die Feinstrukturkonstante  $\alpha = \frac{q^2}{\hbar c}$  ist. Schreiben Sie die Gleichung (6) in SI-Einheiten um. Benutzen Sie dafür die Feinstrukturkonstante in der SI-Version. Checken Sie am Ende die Einheiten.

**Vorlesung:** Di. um 8:30 Uhr – 10:00 Uhr in EW 203,  
Do. um 8:30 Uhr – 10:00 Uhr in EW 203.

**Scheinkriterien:**

- Mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien (u.a. mindestens einmal vorrechnen).

**Sprechzeiten:**

Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.
Prof. Dr. Harald Engel	Mi	14:30 – 16:00 Uhr	EW 738	79462
Mathias Hayn	Mo	15:00 – 17:00 Uhr	EW 711	27884
Wassilij Kopylov		nach Vereinbarung	EW 705	26143
Jan Totz		nach Vereinbarung	EW 627	27681