Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
Maximilian Schmitt (Sprechstunde: Do 10:00-11:00 in EW 708)

5. Übungsblatt – Statistische Physik

Abgabe/Vorrechnen: Di. 27.11.2012 im Tutorium (10:15-11:45 H 0112)

M Aufgabe 16: *Maxwell-Boltzmann-Verteilung*

Sei

$$H = \int d^3p f(\mathbf{p},t) \ln f(\mathbf{p},t)$$

mit Verteilungsfunktion $f(\mathbf{p},t)$ die den Nebenbedingungen

$$\int d^3p f(\mathbf{p},t) = n \quad \text{and} \quad \int d^3p \frac{p^2}{2m} f(\mathbf{p},t) = \bar{\epsilon} = \frac{3}{2} n k_{\mathrm{B}} T$$

unterliegt.

(a) Zeigen Sie, dass wenn H minimal ist, f gegeben ist durch $\exp(-1-\lambda_1-\lambda_2\frac{p^2}{2m})$. (mit $\lambda_{1,2}$: Lagrangemultiplikatoren)

(b) Bestimmen Sie λ_1 und λ_2 und zeigen Sie, dass f die Maxwell-Boltzmann-Verteilung ist.

S Aufgabe 17 (10 Punkte): *Ehrenfest-Modell (5x2 Punkte)*

Gegeben seien 2 Hunde sowie $2R$ Flöhe, die zu Anfang ungleich auf beide Hunde verteilt sind. Die Flöhe springen statistisch zwischen den Hunden hin und her, so dass sich die Populationen im Laufe der Zeit angleichen und die mittlere Zahl der Flöhe auf beiden Hunden gleich wird. Dieses Modell nennt man Ehrenfest'sches Flohmodell.

Seien N_1 bzw. N_2 die Anzahl der Flöhe auf den Hunden 1 und 2. Ferner sind die Flöhe durchnummeriert von 1 bis $2R$ und es gilt $N_1+N_2=2R$. Als Observable wählen wir k mit $2k=N_1-N_2$. Alle τ Sekunden wird nun eine Zahl zwischen 0 und $2R$ gezogen und der entsprechende Floh wechselt den Hund. Wenn also s die Anzahl der Sprünge ist, dann ist die Zeit $t=s\tau$.

(a) Zeigen Sie, dass die Übergangswahrscheinlichkeit für den Übergang vom Zustand k zu dem Zustand $k\pm1$ gegeben ist durch

$$W_{k\pm1,k} = \frac{R\mp k}{2R}.$$

(b) Sie $P(k,s)$ die Wahrscheinlichkeit, dass das System nach s Sprüngen im Zustand k ist. Zeigen Sie, dass:

$$P(k,s) = \frac{R+k+1}{2R} P(k+1,s-1) + \frac{R-k+1}{2R} P(k-1,s-1)\ .$$

(c) Zeigen Sie nun, dass für den Mittelwert von k gilt:

$$\langle k(s)\rangle = \left(1-\frac{1}{R}\right)^s \langle k(0)\rangle\ ,$$

und, dass im Grenzfall sehr vieler Flöhe im System $\langle k(t)\rangle \sim \langle k(0)\rangle e^{-\gamma t}$ mit $\gamma = (R\tau)^{-1}$ gilt.

(d) Programmieren Sie eine Simulation des Modells. Plotten Sie $k(s)$ einer typischen Simulation mit der Anfangsbedingung $k=R$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit $\langle k(s)\rangle$ für $R=5,20,100$.

(e) Verwenden Sie Ihre Simulation um die durchschnittliche Zeit zu bestimmen, die das System braucht um den Zustand $k=R$ zu erreichen, wenn die Anfangsbedingung $k=0$ ist. Plotten Sie diese Durchschnittszeit als Funktion von R. (Hinweis: Starten Sie mit kleinem R!) Erläutern Sie den Zusammenhang mit dem H-Theorem und dem Loschmidt Paradoxon.