Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
Maximilian Schmitt (Sprechstunde: Do 10:00-11:00 in EW 708)

7. Übungsblatt – Statistische Physik

Abgabe/Vorrechnen: Di. 11.12.2012 im Tutorium (10:15-11:45 H 0112)

S Aufgabe 20 (5 Punkte): *Phasenraumvolumen und Entropie des idealen Gases*

(a) Sei $\Omega(U)$ die Anzahl der Zustände mit Energie kleiner oder gleich U für ein Gas N nicht wechselwirkender Teilchen im Volumen V. Zeigen Sie, dass

$$\Omega(U) \propto V^N U^{3N/2} \,. \tag{5.4}$$

Bestimmen Sie die Proportionalitätskonstante.

(b) Zeigen Sie, dass für die Entropie des idealen Gases die Sackur-Tetrode-Formel gilt:

$$S(U) = k_B \ln g(U) = k_B \ln\left(\frac{1}{N!h^{3N}}\Omega(U)\right) = Nk_B\left(\ln\left[\frac{V}{N}\left(\frac{4\pi mU}{3Nh^2}\right)^{3/2}\right] + \frac{5}{2}\right) \,. \tag{5.7}$$

Achtung: Um exakt diese Formel herzuleiten, muss man $\ln N! \approx N\ln N - N$ verwenden. Mit $\ln N! \approx N\ln N$ fehlt der Summand $5/2$!

(c) Leiten Sie die Zustandsgleichung des idealen Gases her.

M Aufgabe 21: *Mikrokanonische Entropie*

(a) Zeigen Sie, dass für eine zweifach differenzierbare Funktion $f(x)$ mit einem globalem Maximum in x_0 im Grenzfall $N \to \infty$ folgende Näherung gilt

$$\int_a^b e^{Nf(x)}dx \approx \sqrt{\frac{2\pi}{N|f''(x_0)|}}e^{Nf(x_0)} \,,$$

wobei $a < x_0 < b$.

(b) Die Gesamtanzahl der Konfigurationen mit Gesamtenergie U eines isolierten Behälters, der aus zwei Teilbehältern besteht, ist

$$g(U) = \int dU_1 \exp\left[\frac{S_1(U_1) + S_2(U_2)}{k_B}\right] \,, \tag{5.10}$$

wobei U_i und S_i die innere Energie bzw. Entropie des Teilbehälters $i = 1, 2$ ist und $U = U_1 + U_2$. Zeigen Sie, dass im thermodynamischen Limes die Gesamtentropie des Systems gegeben ist durch

$$S(U) = S_1(U_1^*) + S_2(U - U_1^*) \,, \tag{5.12}$$

wobei U_1^* der Wert von U_1 ist, für den die Summe $S_1(U_1) + S_2(U - U_1)$ maximal wird.

S **Aufgabe 22 (5 Punkte):** *Äquipartitionstheorem und Virialgleichung*

(a) Beweisen Sie das Äquipartitionstheorem

$$\langle x_k \frac{\partial H}{\partial x_k} \rangle = k_B T; \qquad x_k = q_k, p_k \ , \tag{5.23}$$

im kanonischen Ensemble mit Hamiltonian H.

(b) Gegeben sei ein Hamiltonian eines nicht-idealen Gases

$$H = \sum_i \left(\frac{1}{2m} \boldsymbol{p}_i^2 + V_{\text{wand}}(\boldsymbol{q}_i) \right) + V_{\text{ww}}(\{\boldsymbol{q}_i\}) \ , \tag{5.25}$$

wobei V_{wand} das Potential der Behälterwände ist und V_{ww} die Wechselwirkung der Gasteilchen untereinander beschreibt. Verwenden Sie das Äquipartitionstheorem um die Virialzustandsgleichung herzuleiten:

$$PV = Nk_B T - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{N} \langle \boldsymbol{q}_i \cdot \frac{\partial V_{\text{ww}}(\{\boldsymbol{q}_i\})}{\partial \boldsymbol{q}_i} \rangle \ . \tag{5.26}$$